Date . . No. 5

(2) $E > \frac{g}{a}$: 回転運動

時刻 $t=0$ に最下点 $\varphi=0$ を通るとし、
そのときの $\dot{\varphi}$ の値を ω とすれば、

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \omega^2 - 2\frac{g}{a}(1-\cos\varphi)$$
$$= \omega^2 - 4\frac{g}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2} \quad \left(= 2E + \frac{2g}{a}\cos\varphi\right) > 0$$

$$\omega^2 > 4\frac{g}{a}$$

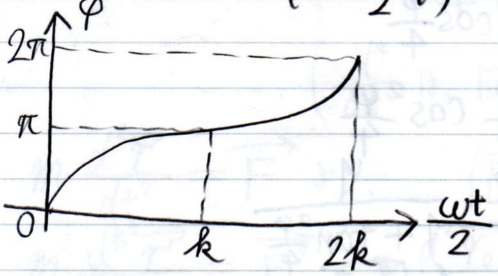
ゆえに、$\frac{4g}{a\omega^2} = k^2 < 1$ とおけば、

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \omega^2\left(1 - k^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

$2\theta = \varphi$　楕円積分

$$\therefore \omega t = \pm\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}} = \pm 2\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$\varphi = 2\theta = 2\sin^{-1}\left(\mathrm{sn}\frac{\omega}{2}t\right)$$



$k = 0.985$

円周を一周する時間 T は、$T = \frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$

$$= \frac{4}{\omega}K(k)$$

(3) $E = \dfrac{g}{a}$ のとき

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a}(1+\cos\varphi) = \frac{4g}{a}\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\therefore \quad t = \pm\sqrt{\frac{a}{g}}\int\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$t=0$ で $\varphi=0$ として積分すると、

$$\log\tan\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \pm\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$$

$$\therefore \quad \tan\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = e^{\pm\sqrt{\frac{g}{a}}t}$$

$$\frac{1+\tan\frac{\varphi}{4}}{1-\tan\frac{\varphi}{4}} = e^{\pm\sqrt{\frac{g}{a}}t}$$

$$\therefore \quad \tan\frac{\varphi}{4} = \frac{e^{\pm\sqrt{\frac{g}{a}}t}-1}{e^{\pm\sqrt{\frac{g}{a}}t}+1} = \pm\tanh\sqrt{\frac{g}{a}}\frac{t}{2}$$

→ ハイパボリックtan

$$\therefore \quad \sin\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{4}$$

$$= 2\tan\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}$$

$$= 2\tan\frac{\varphi}{4}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{\varphi}{4}}$$

$$= \frac{\pm 2\tanh\sqrt{\frac{g}{a}}\frac{t}{2}}{1+\tanh^2\sqrt{\frac{g}{a}}\frac{t}{2}}$$

$$\therefore \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \pm\tanh\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$$

$\varphi \to \pm\pi$ となるためには $t \to \infty$ となる。