(3) (考え方)

- 任意の正数 ε に対して n が十分大きければ
  $|a_n b_n - \alpha\beta| < \varepsilon$ となることを示したい.
- 用いるのは $|a_n - \alpha| < \varepsilon_1$, $|b_n - \beta| < \varepsilon_2$
- $|a_n b_n - \alpha\beta| = |a_n (b_n - \beta) + \beta (a_n - \alpha)|$

$$\leqq |a_n (b_n - \beta)| + |\beta (a_n - \alpha)|$$
$$= \underbrace{|a_n| |b_n - \beta|}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\beta| |a_n - \alpha|}_{\frac{\varepsilon}{2}}$$ にできたらキレイ.

つまり $|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2|\beta|}$ として, $|a_n|$ を上から押さえて ($|a_n| < K$ としたら)

$|b_n - \beta| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$ とすればよい.

収束する数列は有界なので, $|a_n| < K$ をみたすある定数 K が n を十分大きくするとき存在する.

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の定義から任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N_1, N_2 をとると

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|} \quad (n \geqq N_1)$$

$$|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad (n \geqq N_2)$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - \alpha\beta| &= |a_n (b_n - \beta) + \beta (a_n - \alpha)| \\
&\leqq |a_n (b_n - \beta)| + |\beta (a_n - \alpha)| \\
&= |a_n| |b_n - \beta| + |\beta| |a_n - \alpha| \\
&< K |b_n - \beta| + |\beta| |a_n - \alpha| \quad (n\text{を十分大きくしたとき}) \\
&< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} \quad (n \geqq \max(N_1, N_2)\text{に対して}) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} a_n b_n = \alpha\beta$$

//