12　12 回目講義の補足プリント

12.1　注意

試験には電卓（平方根が計算出来れば十分。安価なものでよい。関数電卓しか持っていない者はそれを使ってもよいが、関数計算機能など通常の電卓を超える機能を用いてはならない）を持参のこと。それ以外の持ち込みは不可。必ず出題するのは　正規分布の確率計算と　正規母集団、2 項母集団に関する推測問題。数表[1]は配布する。e は 2.7 で計算する。試験時間は 90 分。

12.2　信頼区間の一覧:正規母集団の場合

$X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立に同一の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っているとする。

(1) 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ の母平均 μ の信頼区間 (母分散 σ^2 既知の場合):

$Z \sim N(0,1)$ のとき、Z の上側 100α%点を Z_α と書く。即ち、

$$P(Z > Z_\alpha) = \alpha. \tag{1}$$

既に学んだ通り、

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1) \tag{2}$$

であるから、

$$P\left(-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \tag{3}$$

$$\iff \quad P\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = 1 - \alpha \tag{4}$$

が成立する。従って、

$$\left[\bar{X} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}},\quad \bar{X} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] \tag{5}$$

は μ に関する信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間である。

(2) 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ の母平均 μ の信頼区間 (母分散 σ^2 未知の場合):

$t \sim t(n-1)$ のとき、t の上側 100α%点を $t_\alpha(n-1)$ と書く。即ち、

$$P(t > t_\alpha(n-1)) = \alpha. \tag{6}$$

既に学んだ通り、$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ とおけば

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t(n-1) \tag{7}$$

であるから、

$$P\left(-t_{\alpha/2}(n-1) \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leq t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \tag{8}$$

$$\iff \quad P\left(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 1 - \alpha \tag{9}$$

[1] http://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/ chkurata/ にも置いてあります。suuhyou.pdf というファイル。

が成立する。従って、

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}},\quad \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right] \tag{10}$$

は μ に関する信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間である。

(3) 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ の母分散 σ^2 の信頼区間:

$Y \sim \chi^2(n-1)$ のとき、Y の上側 100α%点を $\chi^2_\alpha(n-1)$ と書く。即ち、

$$P(Y > \chi^2_\alpha(n-1)) = \alpha. \tag{11}$$

既に学んだ通り、$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ とおけば

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \tag{12}$$

であるから、

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha \tag{13}$$

$$\iff \quad P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = 1-\alpha \tag{14}$$

が成立する。従って、

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\quad \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right] \tag{15}$$

は σ^2 に関する信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間である。

12.3 信頼区間の一覧：中心極限定理に基づく信頼区間

例 12.1. **(支持率の推定)** 国民の何パーセントが国債の新規発行を支持しているかを調べるため、400 人を無作為に選び、支持不支持の如何について尋ねたところ、$\bar{X} = 0.6$ であった。国民全体における支持率 p の 99%信頼区間は

$$\left[0.6 \pm 2.58 \times \sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{400}}\right] = [0.537, 0.663] = [53.7, 66.3](\%)$$

である。□

例 12.2. **(感染率の推定)** ある地域でのある病原虫の感染率を調べるため、その地域から 120 人を無作為に抽出して感染の有無を調べたところ 11 人の感染者がいた。感染率は幾らと推定されるか。

例 12.3. **(自動販売機)** ある自動販売機で売られているジュースの 1 日当たりの販売数を冬季 45 日間調べたところ、平均 $\bar{X} = 11$(本/日) であった。45 日間の販売数はポアソン母集団 $Po(\lambda)$ からの無作為標本と見なせるとする。母平均 λ の 95%信頼区間を求めると、

$$\left[11 \pm 1.96 \times \sqrt{11/45}\right] = [10.0,\ 12.0]$$

となる。□

12.4　正規母集団の母平均の検定

(i) **母分散 σ^2 が既知の場合:**

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \tag{16}$$

なる検定問題を考える。

定理 1. (母平均の検定) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本とする。このとき、$T = (\bar{X} - \mu_0)/\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$ とおけば、

$$\begin{cases} |T| > z_{\alpha/2} & \Rightarrow \quad H_0\text{を棄却する} \\ |T| \leq z_{\alpha/2} & \Rightarrow \quad H_0\text{を採択する} \end{cases} \tag{17}$$

は検定仮説 (16) に対する有意水準 α の検定である。

例 12.4. (電球の寿命) ある白熱電球の寿命の平均は 1700(時間) であると言う。いま，新型の電球が開発され光度が改良されたが、寿命が変化したか否かについては不明であるとする。電球の寿命は新型も従来のものも正規分布をなし，その標準偏差は $\sigma = 180$ 時間であることが分かっている.

そこで、新型電球 16 個を無作為に選び，その寿命 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ を計測したところ、$\bar{X} = 1835$ なる結果が得られた。

$X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ を正規母集団 $N(\mu, (180)^2)$ からの無作為標本とみなし、

$$H_0 : \mu = 1700 \quad H_1 : \mu \neq 1700$$

を有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定する。

$$T = \frac{\bar{X} - 1700}{\sqrt{(180)^2/16}} = \frac{1835 - 1700}{\sqrt{(180)^2/16}} = 3$$

である。他方、臨界値は $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$ であるから、$|T| > z_{0.025}$ が成り立ち、帰無仮説 H_0 は棄却される。即ち、電球の寿命は変化したと言える。

(ii) **母分散が未知の場合**

定理 2. (母平均の t 検定) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本とする。このとき、

$$\begin{cases} |t| > t_{\alpha/2}(n-1) & \Rightarrow \quad H_0\text{を棄却する} \\ |t| \leq t_{\alpha/2}(n-1) & \Rightarrow \quad H_0\text{を採択する} \end{cases} \tag{18}$$

は，検定問題 (16) に対する有意水準 α の検定である．ここに $t_{\alpha/2}(n-1)$ は $t(n-1)$ の上側 $100\alpha/2\%$ 点である．

例 12.5. (電球の寿命) 前節の電球寿命の例において母分散 σ^2 を未知とする．$s^2 = (200)^2$ であったとする。検定問題

$$H_0 : \mu = 1700 \quad H_1 : \mu \neq 1700$$

を考える．有意水準 $\alpha = 0.05$ とする．

$$t = \frac{\bar{X} - 1700}{\sqrt{s^2/16}} = \frac{1835 - 1700}{\sqrt{(200)^2/16}} = 2.7$$

である．他方，臨界値 $t_{0.025}(15) = 2.131$ であるから，$|t| > t_{0.025}(15)$ が成り立ち，帰無仮説 H_0 は棄却される．

12.5 正規母集団の母分散の検定

問 ある小学校では入学時に知能テストを行っていたが、従来は平均 50 で分散 36 であった。本年度の児童について 25 人をランダムに選び、例年と同じ条件でテストしたところ、平均 53 で分散 48 を得た。本年度は児童の揃い方が例年と違うと見てよいか。

(解答) 本年度の児童のテストの結果を $X_1, \cdots, X_{25}$ で表し、これらは互いに独立に同一の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとする。帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = 36$ を対立仮説 $H_1 : \sigma^2 > 36$ に対して有意水準 0.05 で検定する。検定方式は、

$$Y = \frac{(25-1)s^2}{36}$$

とおくとき、

$$\begin{array}{rcl} \chi^2_{0.05}(24) < Y & \Rightarrow & H_0\text{を棄却} \\ Y \leq \chi^2_{0.05}(24) & \Rightarrow & H_0\text{を棄却しない} \end{array} \tag{19}$$

というものである。$\chi^2_{0.05}(24) = 36.4150$ であるから、H_0 は棄却されない。

正規分布表

ａに対して、Φ(a)を与える。但し、Φ(a) は標準正規分布の分布関数である。

すなわち、Z～N(0,1) のとき、Φ(a) = P(Z≦a) .　　153頁(4.5.11)式を参照のこと。

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.9990324	0.9990646	0.9990957	0.9991260	0.9991553	0.9991836	0.9992112	0.9992378	0.9992636	0.9992886
3.2	0.9993129	0.9993363	0.9993590	0.9993810	0.9994024	0.9994230	0.9994429	0.9994623	0.9994810	0.9994991
3.3	0.9995166	0.9995335	0.9995499	0.9995658	0.9995811	0.9995959	0.9996103	0.9996242	0.9996376	0.9996505
3.4	0.9996631	0.9996752	0.9996869	0.9996982	0.9997091	0.9997197	0.9997299	0.9997398	0.9997493	0.9997585
3.5	0.9997674	0.9997759	0.9997842	0.9997922	0.9997999	0.9998074	0.9998146	0.9998215	0.9998282	0.9998347
3.6	0.9998409	0.9998469	0.9998527	0.9998583	0.9998637	0.9998689	0.9998739	0.9998787	0.9998834	0.9998879
3.7	0.9998922	0.9998964	0.9999004	0.9999043	0.9999080	0.9999116	0.9999150	0.9999184	0.9999216	0.9999247
3.8	0.9999277	0.9999305	0.9999333	0.9999359	0.9999385	0.9999409	0.9999433	0.9999456	0.9999478	0.9999499
3.9	0.9999519	0.9999539	0.9999557	0.9999575	0.9999593	0.9999609	0.9999625	0.9999641	0.9999655	0.9999670
4.0	0.9999683	0.9999696	0.9999709	0.9999721	0.9999733	0.9999744	0.9999755	0.9999765	0.9999775	0.9999784

カイ2乗分布表: Y が自由度 m のカイ2乗分布に従うとしたとき、Y の上側 100α%点を与える。
すなわち、P(Y ≧ u) = α となる u を与える。ここで、u はテキスト229頁の $\chi 2_{\alpha}$(m)に等しい

自由度m ＼ α	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01
1	0.00016	0.00098	0.0039	3.84	5.02	6.63
2	0.020	0.051	0.10	5.99	7.38	9.21
3	0.11	0.22	0.35	7.81	9.35	11.34
4	0.30	0.48	0.71	9.49	11.14	13.28
5	0.55	0.83	1.15	11.07	12.83	15.09
6	0.87	1.24	1.64	12.59	14.45	16.81
7	1.24	1.69	2.17	14.07	16.01	18.48
8	1.65	2.18	2.73	15.51	17.53	20.09
9	2.09	2.70	3.33	16.92	19.02	21.67
10	2.56	3.25	3.94	18.31	20.48	23.21
11	3.05	3.82	4.57	19.68	21.92	24.72
12	3.57	4.40	5.23	21.03	23.34	26.22
13	4.11	5.01	5.89	22.36	24.74	27.69
14	4.66	5.63	6.57	23.68	26.12	29.14
15	5.23	6.26	7.26	25.00	27.49	30.58
16	5.81	6.91	7.96	26.30	28.85	32.00
17	6.41	7.56	8.67	27.59	30.19	33.41
18	7.01	8.23	9.39	28.87	31.53	34.81
19	7.63	8.91	10.12	30.14	32.85	36.19
20	8.26	9.59	10.85	31.41	34.17	37.57
21	8.90	10.28	11.59	32.67	35.48	38.93
22	9.54	10.98	12.34	33.92	36.78	40.29
23	10.20	11.69	13.09	35.17	38.08	41.64
24	10.86	12.40	13.85	36.42	39.36	42.98
25	11.52	13.12	14.61	37.65	40.65	44.31
26	12.20	13.84	15.38	38.89	41.92	45.64
27	12.88	14.57	16.15	40.11	43.19	46.96
28	13.56	15.31	16.93	41.34	44.46	48.28
29	14.26	16.05	17.71	42.56	45.72	49.59
30	14.95	16.79	18.49	43.77	46.98	50.89
31	15.66	17.54	19.28	44.99	48.23	52.19
32	16.36	18.29	20.07	46.19	49.48	53.49
33	17.07	19.05	20.87	47.40	50.73	54.78
34	17.79	19.81	21.66	48.60	51.97	56.06
35	18.51	20.57	22.47	49.80	53.20	57.34
36	19.23	21.34	23.27	51.00	54.44	58.62
37	19.96	22.11	24.07	52.19	55.67	59.89
38	20.69	22.88	24.88	53.38	56.90	61.16
39	21.43	23.65	25.70	54.57	58.12	62.43
40	22.16	24.43	26.51	55.76	59.34	63.69
41	22.91	25.21	27.33	56.94	60.56	64.95
42	23.65	26.00	28.14	58.12	61.78	66.21
43	24.40	26.79	28.96	59.30	62.99	67.46
44	25.15	27.57	29.79	60.48	64.20	68.71
45	25.90	28.37	30.61	61.66	65.41	69.96
46	26.66	29.16	31.44	62.83	66.62	71.20
47	27.42	29.96	32.27	64.00	67.82	72.44
48	28.18	30.75	33.10	65.17	69.02	73.68
49	28.94	31.55	33.93	66.34	70.22	74.92
50	29.71	32.36	34.76	67.50	71.42	76.15
60	37.48	40.48	43.19	79.08	83.30	88.38
70	45.44	48.76	51.74	90.53	95.02	100.43
80	53.54	57.15	60.39	101.88	106.63	112.33
90	61.75	65.65	69.13	113.15	118.14	124.12
100	70.06	74.22	77.93	124.34	129.56	135.81

t分布表：

t が自由度mの t 分布に従うとしたとき、t の上側 100α％点を与える。(テキスト228頁参照)

すなわち、$P(t \geqq u) = \alpha$ となる u を与える。ここで $u = t_{\alpha}(m)$ である。

自由度m ＼ α	0.1	0.05	0.025	0.01
1	3.078	6.314	12.706	31.821
2	1.886	2.920	4.303	6.965
3	1.638	2.353	3.182	4.541
4	1.533	2.132	2.776	3.747
5	1.476	2.015	2.571	3.365
6	1.440	1.943	2.447	3.143
7	1.415	1.895	2.365	2.998
8	1.397	1.860	2.306	2.896
9	1.383	1.833	2.262	2.821
10	1.372	1.812	2.228	2.764
11	1.363	1.796	2.201	2.718
12	1.356	1.782	2.179	2.681
13	1.350	1.771	2.160	2.650
14	1.345	1.761	2.145	2.624
15	1.341	1.753	2.131	2.602
16	1.337	1.746	2.120	2.583
17	1.333	1.740	2.110	2.567
18	1.330	1.734	2.101	2.552
19	1.328	1.729	2.093	2.539
20	1.325	1.725	2.086	2.528
21	1.323	1.721	2.080	2.518
22	1.321	1.717	2.074	2.508
23	1.319	1.714	2.069	2.500
24	1.318	1.711	2.064	2.492
25	1.316	1.708	2.060	2.485
26	1.315	1.706	2.056	2.479
27	1.314	1.703	2.052	2.473
28	1.313	1.701	2.048	2.467
29	1.311	1.699	2.045	2.462
30	1.310	1.697	2.042	2.457
31	1.309	1.696	2.040	2.453
32	1.309	1.694	2.037	2.449
33	1.308	1.692	2.035	2.445
34	1.307	1.691	2.032	2.441
35	1.306	1.690	2.030	2.438
36	1.306	1.688	2.028	2.434
37	1.305	1.687	2.026	2.431
38	1.304	1.686	2.024	2.429
39	1.304	1.685	2.023	2.426
40	1.303	1.684	2.021	2.423
41	1.303	1.683	2.020	2.421
42	1.302	1.682	2.018	2.418
43	1.302	1.681	2.017	2.416
44	1.301	1.680	2.015	2.414
45	1.301	1.679	2.014	2.412
46	1.300	1.679	2.013	2.410
47	1.300	1.678	2.012	2.408
48	1.299	1.677	2.011	2.407
49	1.299	1.677	2.010	2.405
50	1.299	1.676	2.009	2.403
60	1.296	1.671	2.000	2.390
70	1.294	1.667	1.994	2.381
80	1.292	1.664	1.990	2.374
90	1.291	1.662	1.987	2.368
100	1.290	1.660	1.984	2.364