

## 7 8回目講義の補足

### 7.1 前回の残り：指数分布

公式： $X \sim E_X(\lambda)$  のとき、

$$P(X > a) = e^{-\lambda a}. \quad (1)$$

定理 1. (平均と分散)  $X \sim E_X(\lambda)$  ならば,  $X$  の平均と分散は次のようである.

$$E(X) = 1/\lambda, V(X) = 1/\lambda^2, D(X) = 1/\lambda. \quad (2)$$

定理 2. (指数分布の無記憶性)  $X \sim E_X(\lambda)$  とする. このとき, 任意の  $a, b > 0$  に対して次式が成立する.

$$P(X > a + b | X > b) = P(X > a). \quad (3)$$

逆に (3) が成り立つような  $(0, \infty)$  上の連続型確率分布は指数分布である.

次の例にあるように  $\lambda$  は単位時間当たりの事象の生起回数であり,  $1/\lambda$  が事象の生起間隔となる.

例 7.1. (来店間隔) ある会社の電話は1時間当たり平均20件 ( $\lambda = 20(\text{件/時}) = 1/3(\text{件/分})$ ) である. 電話の到着間隔がランダムならば, 電話のかかってくる間隔  $X$  (分) は平均  $1/\lambda = 3(\text{分/件})$  の指数分布  $E_X(1/3)$  に従う. このとき, 15分以上電話の来ない確率は

$$P(X \geq 15) = e^{-\lambda \times 15} = e^{-5} = 0.0067 \quad (4)$$

と計算できる. 6分以内に来る確率は  $P(X \leq 6) = 1 - e^{-\lambda \times 6} = 1 - 0.135 = 0.865$ . □

### 7.2 同時確率分布

$X, Y$  を離散型確率変数とする. これをベクトルの形で  $(X, Y)$  と表し, 2次元確率変数と呼ぶ.  $(X, Y)$  は飛び飛びの値しか取らないものとする. 即ち,

$$(X, Y) \text{ の値域} = \{(x_i, y_j) \mid i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N\} \quad (5)$$

とする.  $(X, Y)$  の性質は,

$$P((X, Y) = (x_i, y_j)) = P(X = x_i, Y = y_j) = f(x_i, y_j) \quad (i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N) \quad (6)$$

によって定まる. これを  $(X, Y)$  の同時確率分布と言う. 勿論のこと,  $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f(x_i, y_j) = 1$  が成り立つ.

### 7.3 簡単な例

2次元確率変数  $(X, Y)$  の同時確率分布が次のように与えられているとする.

$X \setminus Y$	1	2	3	$f_X(x)$
0	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{5}$
$f_Y(y)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

(i)  $X$  の周辺分布  $f_X(x)(= P(X = x))$  は次の通り。

$x$	0	1	2
$f_X(x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

(ii)  $Y$  の周辺分布  $f_Y(y)(= P(Y = y))$  は次の通り。

$y$	1	2	3
$f_Y(y)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

(iii)  $E(X)$  と  $V(X)$  とを求めよ。周辺分布から計算すればよい：

$$E(X) = \sum_{x=0}^2 x f_X(x) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{2}{5} = 1 \quad (7)$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^2 x^2 f_X(x) = 0^2 \times \frac{2}{5} + 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{2}{5} = \frac{9}{5} \quad (8)$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{9}{5} - 1^2 = \frac{4}{5} \quad (9)$$

(iv)  $E(Y)$  と  $V(Y)$  とを求めよ。上と同様に出来る。 $E(Y) = 2$ 、 $V(Y) = 4/5$ 。

(v)  $E(XY)$  を求めよ。これは同時分布から求める。

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=0}^2 \sum_{y=1}^3 xy f(x, y) \\ &= 0 \times 1 \times \frac{3}{20} + 0 \times 2 \times \frac{1}{10} + 0 \times 3 \times \frac{3}{20} \\ &\quad + 1 \times 1 \times \frac{1}{10} + 1 \times 2 \times 0 + 1 \times 3 \times \frac{1}{10} \\ &\quad + 2 \times 1 \times \frac{3}{20} + 2 \times 2 \times \frac{1}{10} + 2 \times 3 \times \frac{3}{20} \\ &= 2 \end{aligned} \quad (10)$$

(vi) 共分散  $C(X, Y)$  を求めよ。公式:  $C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$  を用いる。

$$C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 2 - 1 \times 2 = 0 \quad (11)$$

(vii) 相関係数  $\rho(X, Y) = C(X, Y) / \sqrt{V(X)V(Y)}$  を求めよ：

$$\rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{4}{5} \times \frac{4}{5}}} = 0 \quad (12)$$

(viii)  $X$  と  $Y$  が独立か否かを調べる。(復習: 独立  $\iff f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$  for all  $x, y$ )

$(x, y)$  の全ての組み合わせで上式が成立していなければ独立とはならない。しかし、

$$f(1, 2) = 0 \neq \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = f_X(1)f_Y(2)$$

であるから独立ではない。

## 7.4 独立性の応用例

例 7.2. (最小値の分布) 確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_n$  は互いに独立に同一の指数分布  $E_X(\lambda)$  に従うとする。

1. ATM の 1 人当りの使用時間は平均 2 分の指数分布  $E_X(1/2)$  で表されるとする。ATM が 1 台で、自分の前に 1 人の使用中の客がいるとする場合、1 分以上待たされる確率は、 $P(X > 1) = e^{-(1/2) \times 1} = 0.607$  である。ATM が 5 台あって、5 台とも使用中である場合は、1 分以上待たされる確率は、各台の使用時間を  $X_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) とすれば、

$$P(X_1 > 1, X_2 > 1, \dots, X_5 > 1) = P(X_1 > 1)P(X_2 > 1) \cdots P(X_5 > 1) \quad (13)$$

$$= 0.607 \times 0.607 \times \cdots \times 0.607 = 0.082. \quad (14)$$

2.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の最小値を  $Z$  とおくと  $Z \sim E_X(n\lambda)$  が成り立つ。何故なら、

$$\{Z > x\} = \{X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x\}$$

であるから、

$$P(Z > x) = P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x) \quad (15)$$

$$= P(X_1 > x)P(X_2 > x) \cdots P(X_n > x) \quad (\text{独立性の定義より}) \quad (16)$$

$$= e^{-\lambda x} e^{-\lambda x} \cdots e^{-\lambda x} \quad (\text{前回の公式より}) \quad (17)$$

$$= e^{-n\lambda x} \quad (18)$$

が得られ、 $Z$  の分布関数は  $P(Z \leq x) = 1 - e^{-n\lambda x}$  であると分かり、これを微分すれば、指数分布  $E_X(n\lambda)$  の密度関数が得られるからである。

3. ATM の 1 人当りの使用時間は平均 1 分の指数分布  $E_X(1)$  で表されるとする。A 君が銀行に入ると、5 台の ATM があり、5 台とも使用中であった。各台の使用時間を  $X_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) とすれば、A 君の待ち時間は  $X_1, X_2, \dots, X_5$  の最小値  $Z$  である。2 より、 $Z \sim E_X(5)$  であるから、 $E(Z) = 1/5(\text{分}) = 12(\text{秒})$  である。すなわち、A 君の平均待ち時間は 12 秒である。

## 7.5 基本定理

定理 3.  $X_1, \dots, X_n$  は互いに独立に同一の確率分布に従うものとする。

$$E(X_1) = \cdots = E(X_n) \equiv \mu, \quad V(X_1) = \cdots = V(X_n) \equiv \sigma^2$$

と置く。このとき、 $X_1, \dots, X_n$  の平均  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  は次の 2 式を満足する。

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (19)$$

例 7.3. (典型例)  $n$  個の確率変数  $X_1, \dots, X_n$  が互いに独立に同一の分布  $F$  に従っているとす。分布  $F$  の平均は  $\mu$ 、分散は  $\sigma^2$  であるとする。 $T = \sum_{i=1}^n X_i$  とおく。このとき、次の結果が得られる。

1. ベルヌーイ分布  $Ber(p)$  の場合。この場合、 $\mu = p$ 、 $\sigma^2 = p(1-p)$  であるから、

$$E(\bar{X}) = p, \quad V(\bar{X}) = \frac{p(1-p)}{n} \quad (20)$$

$$E(T) = np, \quad V(T) = np(1-p) \quad (21)$$

2. ポアソン分布  $P_O(\lambda)$  の場合。この場合、 $\mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda$  であるから、

$$E(\bar{X}) = \lambda, V(\bar{X}) = \frac{\lambda}{n} \quad (22)$$

$$E(T) = n\lambda, V(T) = n\lambda \quad (23)$$

3. 正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  の場合。この場合、

$$E(\bar{X}) = \mu, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (24)$$

$$E(T) = n\mu, V(T) = n\sigma^2 \quad (25)$$

4. 指数分布  $E_X(\lambda)$  の場合。この場合、 $\mu = 1/\lambda, \sigma^2 = 1/\lambda^2$  であるから、

$$E(\bar{X}) = 1/\lambda, V(\bar{X}) = \frac{1}{n\lambda^2} \quad (26)$$

その他の確率分布についても同様である。

上式とチェビシェフの不等式を組み合わせ、 $\bar{X}$  のばらつきを調べよう。チェビシェフの不等式を復習すると次の通り：確率変数  $Z$  は、平均  $E(Z) = \alpha$ 、分散  $V(Z) = \beta^2$  であるとする。このとき、

$$P(\alpha - k\beta \leq Z \leq \alpha + k\beta) \geq 1 - 1/k^2.$$

(i) あるテレビ番組の視聴率が 20%であったとする（通常この数値は未知だが、今は全知の立場に立つことにする）。400 世帯に視聴の有無について尋ねるとする。回答を  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 400$ ) と表し、視聴していたならば  $X_i = 1$ 、そうでなければ  $X_i = 0$  と記録するとする。このとき、 $X_1, \dots, X_{400}$  は互いに独立に同一のベルヌーイ分布  $Ber(0.2)$  に従っていると見なしてよい。このとき、 $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_{400})/400$  はどれくらいばらつくか。

上の例の 1. において  $p = 0.2$  として、

$$E(\bar{X}) = 0.2, V(\bar{X}) = \frac{0.2 \times 0.8}{400} = 0.0004, D(\bar{X}) = \sqrt{0.0004} = 0.02. \quad (27)$$

従って、チェビシェフの不等式より、

$$P(0.2 - 2 \times 0.02 \leq \bar{X} \leq 0.2 + 2 \times 0.02) = P(0.16 \leq \bar{X} \leq 0.24) \geq 1 - 1/2^2 = 3/4 \quad (28)$$

(ii) ある大学の男子学生の身長分布は  $N(170, 6^2)$  であるとする。100 人を無作為に選び、その平均  $\bar{X}$  を計算するものとする。上の例の 3. において  $\mu = 170, \sigma^2 = 6^2$  として、

$$E(\bar{X}) = 170, V(\bar{X}) = \frac{6^2}{100} = 0.36, D(\bar{X}) = \sqrt{0.36} = 0.6. \quad (29)$$

従って、チェビシェフの不等式より、

$$P(170 - 2 \times 0.6 \leq \bar{X} \leq 170 + 2 \times 0.6) = P(168.8 \leq \bar{X} \leq 171.2) \geq 1 - 1/2^2 = 3/4 \quad (30)$$