2) マックスウェル方程式

初期条件

$$
\boxed{\begin{array}{ll}
1 & \operatorname{div}\mathbb{D}=\rho \\
1 & \operatorname{div}\mathbb{B}=0 \\
3 & \operatorname{rot}\mathbb{E}+\dfrac{\partial\mathbb{B}}{\partial t}=0 \\
3 & \operatorname{rot}\mathbb{H}-\dfrac{\partial\mathbb{D}}{\partial t}=\mathbb{j} \\
 & \begin{cases}\mathbb{D}=\varepsilon\mathbb{E}\\ \mathbb{B}=\mu\mathbb{H}\end{cases}
\end{array}}
$$

$\mathbb{E}=(E_1, E_2, E_3)$
$\mathbb{H}=(H_1, H_2, H_3)$ 変数6つ

$(\rho, \mathbb{j})$ が given $\Longrightarrow$ $\mathbb{E}, \mathbb{H}$ を決める。
$(\mathbb{D}, \mathbb{B})$

連立偏微分方程式

Maxwell 方程式

(上から)
- クーロンの法則
- ビオ・サバールの法則
- Monopole 不在
- Farady の法則

(実験事実)

3) 電磁波

真空中 $\begin{cases}\varepsilon=\varepsilon_0\\ \mu=\mu_0\end{cases}$ $\begin{cases}\mathbb{D}=\varepsilon_0\mathbb{E}\\ \mathbb{B}=\mu_0\mathbb{H}\end{cases}$

$\begin{cases}\rho=0\\ \mathbb{j}=0\end{cases}$ を考える。 $\begin{cases}\operatorname{div}\mathbb{D}=0\\ \operatorname{div}\mathbb{H}=0\\ \operatorname{rot}\mathbb{E}+\mu_0\dfrac{\partial\mathbb{H}}{\partial t}=0\\ \operatorname{rot}\mathbb{H}-\varepsilon_0\dfrac{\partial\mathbb{E}}{\partial t}=0\end{cases}$

電場と磁場の時間変化が伝わっていく。

$\Rightarrow$ **電磁波**

(Maxwell が予言した)

$$\operatorname{rot}\mathbb{E}+\mu_0\frac{\partial\mathbb{H}}{\partial t}=0$$

両辺の rot をとる。

◎ rot rot = grad div − Δ を用いると、

$$\operatorname{grad}\underbrace{\operatorname{div}\mathbb{E}}_{=0}-\Delta\mathbb{E}+\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\big(\underbrace{\operatorname{rot}\mathbb{H}}_{=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t}}\big)=0$$

$$\therefore\ -\Delta\mathbb{E}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbb{E}=0$$

$$\boxed{\left(\Delta-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbb{E}=0}$$

同様に、

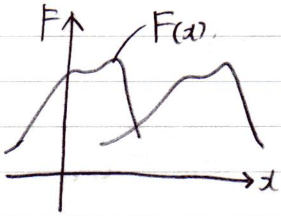
$$\boxed{\left(\Delta-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbb{H}=0}$$

(cf) $\left(\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(\mathbf{r}, t) = 0$

一次元 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(x, t) = 0$

一般解. $f(x,t) = F(x - vt) + G(x + vt)$ (F, Gは任意関数)

$$\left(\begin{cases} \xi = x + vt \\ \eta = x - vt \end{cases} \quad (x, t) \longrightarrow (\xi, \eta) \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} f(\xi, \eta) = 0 \right)$$



$\begin{cases} \text{F: x軸正方向に速さ}v\text{で進む波} \\ \text{G: x軸負方向に速さ}v\text{で進む波} \end{cases}$

(波動方程式)

$$\frac{1}{v^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \Longrightarrow \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}} \longrightarrow 3 \times 10^8 \, \mathrm{m/s}$$

光の速度に一致

光は電磁波

- x軸正方向に速さvで進む平面波

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$\begin{cases} \text{振動数 } f \\ \text{波長 } \lambda \end{cases}$ $\boxed{v = f\lambda}$

$\begin{cases} \rho = 0 \\ j = 0 \end{cases}$ を考える

$\mathbb{D} = \varepsilon_0 \mathbb{E}, \quad \mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{H}$

$\mathrm{div}\,\mathbb{E} = 0$ に代入. $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$

$\therefore -\frac{2\pi f}{v} E_x^0 \sin 2\pi f \left(t - \frac{x}{v}\right) = 0$ $\quad \therefore E_x^0 = 0$ (y, z成分しかもたない)

$\mathrm{div}\,\mathbb{H} = 0 \longrightarrow \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$

$\therefore H_x^0 = 0$

$\boxed{\mathbb{E}, \mathbb{H} \text{ は横波}}$