プリントNo．5　(10/06/04)

○述語論理へのイントロダクション

命題論理の限界と述語論理

（1）外は雨か雪が降っているはずだ。 $A \vee Y$
でも雨ではない。 $\neg A$
だからきっと雪にちがいない。 Y

$A \vee Y, \neg A \vdash Y$

（2）人間はみないずれ死ぬ運命にある。
ソクラテスは人間である。
したがってソクラテスもいずれ死ぬ運命にある。

→ 妥当な証明だが命題論理へは形式をとりだせない。

固有名と述語

informalな意味

固有名：ものを指し示す語　⇒　定項　：英小文字aからtまで
述語　：ものの性質、もの同士の関係を表す語　⇒　述語記号：英大文字

（例）　ソクラテスは人間である
⇒ Ns

大文字が先

ソクラテス：s
…は人間である：N

述語は空所をもつ。

（例）　プラトンはアリストテレスの先生である
⇒ Spa

プラトン：p
アリストテレス：a
…は～の先生である：S

量化子と変項

「すべての…について」「ある…が存在して」　⇒　普遍（全称）量化子：∀　存在量化子：∃
量化子を用いて記号化を行う際に必要となるのが　変項　：英小文字uからzまで

（例）　人間はみないずれ死ぬ運命にある

…はいずれ死ぬ運命にある：M (mortal)
人間：？

⇒すべての人間はいずれ死ぬ運命にある

命題論理

⇒すべてのxについて、xが人間である $\boxed{\text{ならば}}$ xはいずれ死ぬ運命にある

⇒ $\forall_x (N_x \rightarrow M_x)$

とおいて

条件をつける。

⇒ $\forall x(x \in N \rightarrow x \in M) \rightarrow \forall x \in N (x \in M)$ ともかける。

人間は固有名ではない。かといってNは性質を示すだけなので、N単。でも表せない

（例）　政治家の中には芸人であったものもいる
⇒ある政治家は芸人であった
⇒あるxが存在して、xは政治家であり $\boxed{\text{そして}}$ xは芸人であった

とおいて　条件　命題ろんりのえんざん子。　条件

⇒ $\exists_x (P_x \wedge C_x)$

…は政治家である：P
…は芸人であった：C

例題：述語論理による形式化

＊定項と述語記号として次のものを用いて、以下の各言明を形式化せよ。

a：　エイブ(Abraham)　　　　**b**：　ビーティー(Beatrice)

Ax：　xは赤ん坊である

Nx：　xはよく泣く　　　**Wx**：　xはよく笑う　　　**Sx**：　xはよく育つ

Txy：　xはyのともだちである　　　**Lxy**：　xはyを愛している

(1) エイブは赤ん坊である。

Aa

(2) エイブはよく泣く赤ん坊である。→ エイブはよく泣く。＋ エイブは赤ん坊だ。

$Na \wedge Aa$

(3) エイブもビーティーもよく泣く。→ エイブはよく泣く。＋ ビーティーもよく泣く。

$Na \wedge Nb$

(4) 赤ん坊はみんなよく泣く。 → すべての赤ん坊はよく泣く。⇔ すべてのxについて xは赤ん坊ならば、xはよく泣く。

$\forall x\ (Ax \rightarrow Nx)$

(5) よく笑う赤ん坊もいる。

$\exists x\ (Wx \wedge Ax)$

あるxについて、xがよく泣く赤ん坊 → よく笑い、よく育つ

(6) よく泣く赤ん坊はよく笑い、よく育つ。→すべてのよく泣く赤ん坊は $\forall x$

$\forall x((Nx \wedge Ax) \rightarrow (Wx \wedge Sx))$

(7) よく笑うものがみなよく泣くとは限らない。→(よく笑うものがみなよく泣く)ということはない。

$\neg \forall x (Wx \rightarrow Nx)$

⑧ヒント．忙しいときに限って電話がかかってくる。

⇔ 電話がかかってくる → 忙しいときだ。

のは 向きが実はこう。

(7) 別解） $\exists x \neg (Wx \rightarrow Nx)$

$\exists x\ (Wx \wedge \neg Nx)$

(8) よく泣くものに限ってよく育つ。

$\forall x\ (Sx \rightarrow Nx)$

(9) ビーティーはエイブのともだちである。

Tba

(10) エイブにはともだちがいる。

$\exists x\ Txa$

(11) エイブのともだちはみんなよく笑う。 すべてのエイブの友だちはよく笑う。

$\forall x\ (Txa \rightarrow Wx)$

難 (12) よく泣く赤ん坊のともだちはみんなよく泣く。すべてのよく泣く赤ん坊の友だちはよく泣く

$\forall x \exists y ((Txy \wedge Ny) \rightarrow Nx)$ すべてのxについて よく泣く赤ん坊の友だちならばよく泣く。

難 (13) ともだちのともだちはみなともだちだ。

$\forall x \exists y \exists z ((Txy \wedge Tyz) \rightarrow Txz)$ すべてのxについて、友だちの友だちならば友だちだ。

(14) みんな自分自身を愛している。

$\forall x\ Lxx$

(15) みんながみんなを愛している。

$\forall x\ \forall y\ Lxy$

(16) すべてのものを愛しているような、あるものが存在する。

$\exists x\ \forall y\ Lxy$

(17) どんなものも、なんらかのものを愛している。

$\forall x\ \exists y\ Lxy$