第９回

・ 和の分布

２つの独立な確率変数 X, Y について以下の定理が成立する。

・$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ (期待値の線形性)

・$X\perp Y \Rightarrow V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

(X,Y が独立でないときは、$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+C(X,Y)$)

おさらい

$C(X,Y)$ は、X と Y の共分散

以上の定理は確率変数が n 個の場合でも成り立つ。

i.e. $X_1,X_2,\cdots,X_n :\perp \Rightarrow \begin{cases} E(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \\ V(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} V(X_i) \end{cases}$

$*\begin{cases} X_1,X_2,\cdots,X_n :\perp \\ X_1,X_2,\cdots X_n \sim F \end{cases}$ 独立同一分布の条件(F は確率分布を表す)

(independently and identically distributed)

$\Rightarrow \begin{cases} E(X_1)=E(X_2)=\cdots=E(X_n)=\mu \\ V(X_1)=V(X_2)=\cdots=V(X_n)=\sigma^2 \end{cases}$

成り立つ定理は以下の通り

i.i.d.の下で

・$E(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=n\mu, V(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} V(X_i)=n\sigma^2$

・$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ について、$E(\overline{X})=\mu, V(\overline{X})=\frac{1}{n^2}\times n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$

*これらは様々な分布で成立(第 9 回配布プリントで確認)

プリントの補足

・ベルヌーイ分布について

ベルヌーイ分布とは、２項分布について n=1 としたものである。

定義

$$Ber(p) = B(1, p)$$
$$X \sim Ber(p)$$
$$\Rightarrow P(X = 0) = 1 - p, P(X = 1) = p$$

おさらい

$B(n, p)$ は２項分布である

成り立つ定理は以下の通り

・ $X \sim Ber(p) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = p \\ V(X) = p(1-p), D(x) = \sqrt{p(1-p)} \end{cases}$

・再生性

独立にある分布に従う２つの確率変数の和は再びその分布に従う。

この性質を再生性と言う。

これは、色々な分布で成り立つ。

成り立つ定理は以下の通り

・ $X_i \sim P_O(\lambda_i)(i = 1,2,\cdots,n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P_O(\lambda_i)$

・ $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)(i = 1,2,\cdots,n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$

・ $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)(i = 1,2,\cdots,n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2), \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

（この定理が一番重要！！）

・ $X_i \sim Ber(p)(i = 1,2,\cdots,n) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$

・中心極限定理

・i.i.d.の下で、n を大とすると、$\bar{X}$ の分布は

$N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ にいくらでも近づく。

・ $\lim_{n \to \infty} P(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2 / n}} \leq x) = \Phi(x)$（$\Phi(x)$：標準正規分布の分布関数）