プリントNo. 6（10/06/11）

○ 述語論理の言語

・一項述語記号
プリントでいえば N◯ S◯ ← Nx Sx ↑1コ

・二項述語記号
T◯◯ ← Txy ↑2コ

・零項述語記号
今までつかってた命題記号とか。
※とか

1．語彙

・論理記号

論理演算子（論理結合子）：∧　∨　→　¬

量化子：∀　∃

括弧：(　)

・非論理記号

述語記号：英大文字 ***A***、‥、***Z***（添え字つきも可）および×

　　各述語記号は、項数 (0,1,2,‥) を持つ。×の項数は0。

定項：英小文字 ***a***、‥、***t***（添え字つきも可）

変項：英小文字 ***u***、‥、***z***（添え字つきも可）

命題論理でも命題記号として存在したが、それは述語記号の一部（項数0）としてみなす。

2．論理式の形成規則

・述語論理の論理式は次の形成規則によって定義される記号の列である。

（1）n項述語記号に続けてn個の定項が並ぶものは論理式である。　命題ろんりとの変更点。

（2）ϕ、ψ が論理式のとき、$(\phi \wedge \psi)$ は論理式である。

（3）ϕ、ψ が論理式のとき、$(\phi \vee \psi)$ は論理式である。

（4）ϕ、ψ が論理式のとき、$(\phi \to \psi)$ は論理式である。

（5）ϕ が論理式のとき、$\neg\phi$ は論理式である。

（6）ϕ が定項 α を含む論理式、ζ が ϕ に現れない変項のとき、ϕ の中の1個以上の α を ζ に変えたものを ϕ_ζ とすると、$\forall\zeta\phi_\zeta$ は論理式である。

ぜーた ζ

（7）ϕ が定項 α を含む論理式、ζ が ϕ に現れない変項のとき、ϕ の中の1個以上の α を ζ に変えたものを ϕ_ζ とすると、$\exists\zeta\phi_\zeta$ は論理式である。

（8）以上の各項によって論理式と認められるもののみが論理式である。

(6) ex.

ϕ: $((Pa \wedge Qbc) \to Pb)$

α: a　ζ: x

ϕ_ζ: $((Px \wedge Qbc) \to Pb)$

$\forall x((Px \wedge Qbc) \to Pb)$ は wff

この授業では扱わない。

☆これとは異なる形成規則の一例

（1）n項述語記号に続けてn個の定項または変項が並ぶものは論理式である。

（2）ϕ、ψ が論理式のとき、$(\phi \wedge \psi)$ は論理式である。

（3）ϕ、ψ が論理式のとき、$(\phi \vee \psi)$ は論理式である。

（4）ϕ、ψ が論理式のとき、$(\phi \to \psi)$ は論理式である。

（5）ϕ が論理式のとき、$\neg\phi$ は論理式である。

（6）ϕ が論理式で、ζ が ~~ϕ に現れない~~変項のとき、$\forall\zeta\phi$ は論理式である。

（7）ϕ が論理式で、ζ が ~~ϕ に現れない~~変項のとき、$\exists\zeta\phi$ は論理式である。

（8）以上の各項によって論理式と認められるもののみが論理式である。

（ϕ に $\forall\zeta\exists\zeta$ の形で現れない）

*量化子に対応する変項：束縛変項

$\forall x\ Px$

この授業で扱うのは全部コレ。

束縛でない変項：自由変項

自由変項を含む wff：開(放)式

cf α: b, ζ: x とすれば。

1. Qbc の $b \to x$
2. Pb の $b \to x$
3. 1+2

3パターンできる。

○ 述語論理の推論規則

０．命題論理の推論規則

∧Ｉ、∧Ｅ１、∧Ｅ２、∨Ｉ１、∨Ｉ２、∨Ｅ、→Ｉ、→Ｅ、¬Ｉ、¬Ｅ
＋矛盾規則
＋二重否定除去規則

これらに、新たに４つの推論規則が加わる。以下、定項 α を含む論理式をＦ(α) と表し、Ｆ(α) の中の１個以上の α をＦ(α) に現れない変項 ζ で置き換えてできる表現をＦ(ζ) とする。

ex: $F(\alpha)$: Pa　$\alpha : a$　$\zeta : x$
とする。

$$\frac{Pa}{\forall x Px}$$ → まずい。
直すと、ソクラテスは人間だ
→ すべてのものは人間だ。

１．普遍量化

ex.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[P(a)]}{P(a) \vee Q(a)}}{P(a) \to (Pa \vee Qa)}}{\forall x(Px \to (Px \vee Qx))}$$

$$\frac{F(\alpha)}{\forall \zeta F(\zeta)}\ (\forall \mathrm{I}) \qquad \frac{\forall \zeta F(\zeta)}{F(\alpha)}\ (\forall \mathrm{E})$$

∀Ｉに関する条件：α は、Ｆ(ζ) にも、また、前提や、規則が適用される際に有効な（いまだキャンセルされない）仮定の中にも含まれていない定項でなくてはならない。

各々、違反すると、どこがおかしくなるかは、ノートに。

２．存在量化

$$\frac{F(\alpha)}{\exists \zeta F(\zeta)}\ (\exists \mathrm{I}) \qquad \frac{\exists \zeta F(\zeta) \qquad \begin{array}{c}[F(\alpha)]\\ \vdots \\ \omega\end{array}}{\omega}\ (\exists \mathrm{E})$$

∃Ｅに関する条件：α は、Ｆ(ζ) にも、ω にも、また、前提や、規則が適用される際に有効な（いまだキャンセルされない）仮定の中にも含まれていない定項でなくてはならない。

複数回用いることもできる。
→ ex. $\forall x((Pa \wedge Qxc) \to Pb)$
$\alpha = a$　$\zeta : y$
$\forall y \forall x((Py \wedge Qxc) \to Pb)$