問2-3 収束することを示せ.

(1) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (2) $a_1 = 1,\ a_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}},\ a_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} \cdots$

ポイント

上に有界な単調増加数列
下 〃 減少 〃 } はある実数に収束するので,

- 有界であること
- 単調増加(or 単調減少)であること

の2つを示せばよい.

(1) 〈方針〉 2項展開を利用する.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^n + {}_nC_1 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + {}_nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k + \cdots + {}_nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n \text{ —— ◎}$$

ここで

$$\begin{aligned}{}_nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} \\ &= \frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{\cancel{(n-k)!}}{\cancel{(n-k)!}} \\ &= \frac{1}{k!}\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(k-1)}{n} \\ &= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \text{ —— ☆}\end{aligned}$$

で

- n を大きくすると ☆ は大きくなる,
- n を大きくすると ◎ の項の数もふえる

⇐(微分して示してもよい.)

ため, a_nは単調増加である.

また, ${}_nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k < \frac{1}{k!}\ (\because ☆) < \frac{1}{2^{k-1}}\ (k>2)$ (⇐ 上から押さえる.)

より $a_n < \underset{k=0}{\underset{\text{Ⅲ}}{1}} + \underset{k=1}{\underset{=}{1}} + \underset{k=2}{\underset{=}{\frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{k>2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$

よって 単調増加で上に有界であるため, これは収束する. //