(iii) $X = axy,\ Y = \frac{1}{2}ax^2,\ Z = bz$ （a, b は実数）
（⇒ $Z = by$ のとき）

は保存力。（保存力でない）

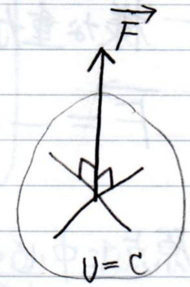
$\because \dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x}, \cdots$ 等より $\nabla \times \vec{F} = 0$

$\left(\because \dfrac{\partial Z}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial z} \right)$

10. 保存力場の性質, Newton ポテンシャル

→ 保存力が各点に働く空間

$$\vec{F} = -\nabla U = -\mathrm{grad}\, U$$

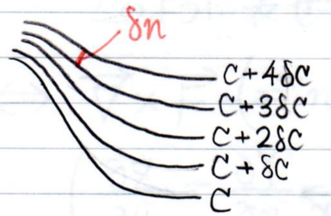


等ポテンシャル面 $U(x, y, z) = C$

$$dU = \nabla U \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

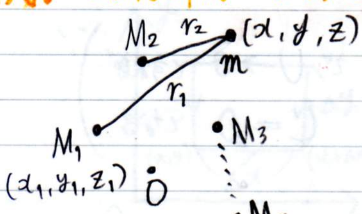
よって、力は等ポテンシャル面に垂直

$$\delta U = \delta C = -\vec{F} \cdot \delta n \quad \text{より、}$$



等ポテンシャル面が密な所で力は大きい。

例. 万有引力のポテンシャル



$$U = -km\left(\frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2} + \cdots\cdots + \frac{M_n}{r_n} \right)$$

$m = 1$ としたものを

Newton ポテンシャルという。

☆ Newtonポテンシャルは調和関数である。

$$\underset{\text{ラプラシアン}}{\triangle} U = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

$$\because \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_1}\right) = -\frac{1}{r_1^2}\cdot\frac{\partial r_1}{\partial x} = -\frac{x-x_1}{r_1^3},$$

$$\cdot\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r_1}\right) = 3\frac{(x-x_1)^2}{r_1^5} - \frac{1}{r_1^3}$$

同様にして

$$\cdot\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r_1}\right) = 3\frac{(y-y_1)^2}{r_1^5} - \frac{1}{r_1^3}$$

$$\cdot\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r_1}\right) = 3\frac{(z-z_1)^2}{r_1^5} - \frac{1}{r_1^3}$$

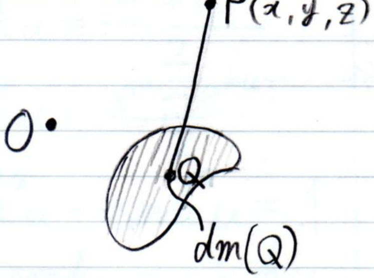
これら3式を加えて、$r_1^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$ に注意すると、

$$\triangle\left(\frac{1}{r_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{r_1}\right) = 0$$

$\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \cdots\cdots \frac{1}{r_n}$ も同様なので、

$$\underset{\text{ラプラシアン}}{\triangle} U = -\gamma\left\{M_1\triangle\left(\frac{1}{r_1}\right) + M_2\triangle\left(\frac{1}{r_2}\right) + \cdots\cdots + M_n\triangle\left(\frac{1}{r_n}\right)\right\} = 0$$

☆ 引力を及ぼしている物体が点ではなく、
有限の大きさをもった連続体である場合。



$$r_{PQ} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$U(P) = -k\int \frac{dm(Q)}{r_{PQ}}$$

$$dm = \begin{cases} \rho\, dV & \text{(体積分布)} \\ \sigma\, dS & \text{(面積分布)} \\ \lambda\, ds & \text{(線分布)} \end{cases}$$