理 2,3 類 18 組　力学 A(鈴木)シケプリ

下の目次のうち高校範囲外だと思われるところの一部だけ説明っぽいのを書きます（主に授業ノートの写し)。確認程度に使ってください。ちゃんとやりたい人は自分で問題集を買ってやってください。問題をかいて解説する気力はないです・・・すんません。
んじゃ、ぼちぼちいきますか。

授業ノートの目次

§1.序論：物理学の世界
　1. 次元解析
　2. SI 単位系（国際単位系）
§2.運動の記述
　1.力とベクトル
　2.位置ベクトル
　3.ベクトル空間
　4.内積、外積
　5.ベクトルの微分・積分
　6.物理量
§3. 運動の法則
　1.ニュートンの３法則
　2.運動方程式
　3.自然界の基本的な力
　4.中心力と角運動量
　5.保存力
　6.仕事とエネルギー
　7.力のつりあいと不安定性
§4. 運動方程式の解法
　1.放物運動
　2.振動
　3.力学的エネルギー保存則
　4.惑星の運動
§5. 運動の相対性と慣性力
　1.ガリレイ変換
　2.一様加速系
　3.回転系

§6. 質点系の力学
1.重心運動と相対運動
2.質点系の運動量保存則
3.質点系の全角運動量保存則
4.２体問題
§7. 剛体の力学
1.剛体の自由度
2.固定軸をもつ剛体の力学
3.剛体の平面運動
（ 4.あとがき）

↓ここから説明↓

2-4.内積、外積

内積は省略

２つのベクトル$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$の外積（ベクトル積）を$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$と表す。

性質

- $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{A}$　かつ　$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{B}$　で$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$の向きは$\boldsymbol{A}$から$\boldsymbol{B}$に右ねじを回した時に進む向き
- $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = AB\sin\theta$
- $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$　←分配の法則
- $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{AB})$　←ベクトル３重積

$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z), \boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ として $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ を成分で表すと

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x)$$

補足

実はベクトル３重積は授業で扱ってない気がします。が、教科書とかには書いてあるので一応軽く証明を・・・。

x 成分だけおっかけると

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_x &= A_y(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_z - A_z(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_y \\ &= A_y(B_XC_y - B_yC_x) - A_z(B_zC_x - B_xC_z) = (\boldsymbol{AC})B_x - (\boldsymbol{AB})C_x\end{aligned}$$

同様にy 成分とz 成分についてもやればおわりです。

3-4.中心力と角運動量

角運動量は回転運動の量を表す物理量であり

$$\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

で表される。$\boldsymbol{r}$ は質点の位置ベクトル、$\boldsymbol{p}$ は質点の運動量である。これを図形的に考えると（図はないですが）$\boldsymbol{L}$ の大きさは、$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}$ のつくる平行四辺形の面積に等しく、その方向は回転運動の回転軸の方向と、回転の向きを表している。

また、$\boldsymbol{L}$ の時間による微分係数は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \left(\because \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}\text{かつ}\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{p} \right)$$

ここで、質点の運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}$$

の両辺に左から $\boldsymbol{r}$ をかけた形のベクトル積を考えると

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{N}$$

という方程式が得られる。$\boldsymbol{N}$ を（原点まわりの）力のモーメントという。

中心力とは、力の源と力が作用する質点とを結ぶ直線に沿って働く距離の関数としての力である。このような中心力のもとでの運動を扱う際には、その力の源を原点にとると常に $\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{r}$ なので $\boldsymbol{N} = 0$, したがって

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \ , \qquad \therefore \ \boldsymbol{L} = \text{一定}$$

となり角運動量は保存される。

3-5.保存力

質点の運動に際して $\boldsymbol{F}$ のする仕事が、出発点と到達点の位置だけで決まり、途中の経路に依らないとき、その力を保存力という。

以下 3-6, 3-7 では力が保存力の場合のみ考える

3-6.仕事とエネルギー

基準となる点$\boldsymbol{r}_0$ を選び、そこからある点 $\boldsymbol{r}$ まで保存力に逆らって質点を移動させるときその逆らう力 $-\boldsymbol{F}$ のする仕事

$$U(\boldsymbol{r}) \equiv -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

は $\boldsymbol{r}$ のみの関数となる。このスカラー量 $U(\boldsymbol{r})$ を点 $\boldsymbol{r}$ の持つポテンシャル

といい、保存力 $\boldsymbol{F}$ に逆らって $\boldsymbol{r}_0$ から $\boldsymbol{r}$ まで移動した質点が持つ位置エネルギーと解釈することもできる。
ここで運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}$$

の両辺に $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ をスカラー的に掛け、$\boldsymbol{r}_1$ から $\boldsymbol{r}_2$ までの積分を行うと

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t}\right)^2&=\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=-U(\boldsymbol{r}_2)+U(\boldsymbol{r}_1)\end{aligned}$$

が得られる。この式より

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2+U(\boldsymbol{r})=\text{一定}$$

すなわち、保存力の場における運動では、質点の持つ運動エネルギーと位置エネルギーの和は不変だとわかる。これを力学的エネルギー保存則という。

　今度はポテンシャルから保存力を導き出すための一般的方法を考えることにする。$\Delta\boldsymbol{r}=(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ はなれた２点 $\boldsymbol{r}$ と$\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$ のポテンシャルの差を計算すると

$$\begin{aligned}U(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})-U(\boldsymbol{r})&=-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&\approx-\boldsymbol{F}\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r}\\&=-\left(F_x\Delta x+F_y\Delta y+F_z\Delta z\right)\end{aligned}$$

が得られる。
　一方、この２点間のポテンシャルの差を偏微分係数の定義式を用いて表現すると、

$$\begin{aligned}U(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})-U(\boldsymbol{r})&=U(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-U(x,y,z)\\&=U(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-U(x,y+\Delta y,z+\Delta z)\\&\quad+U(x,y+\Delta y,z+\Delta z)-U(x,y,z+\Delta z)\\&\quad+U(x,y,z+\Delta z)-U(x,y,z)\\&=\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial U}{\partial z}\Delta z\end{aligned}$$

２つの結果を見比べると

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x},F_y=-\frac{\partial U}{\partial y},F_z=-\frac{\partial U}{\partial z}$$

が得られる。これはナブラと呼ばれる微分演算子ベクトル

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

を用いて

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$$

と書くこともできる。また、grad という記号を用いて

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad} U$$

と記すこともある。

3-7.力のつりあいと不安定性

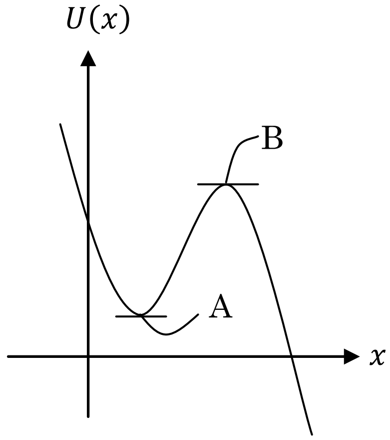
力がつりあっているときにそこが安定なのか不安定なのかについて考える。

力がつりあうとき $\boldsymbol{F} = 0$ なので $-\boldsymbol{\nabla} U = 0$

もし U が x のみで表される関数だとすると

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = 0$$

を満たすところ（右図の A と B）で力はつりあっている。



静止している質点が保存力の場の中で運動方程式にしたがって運動するとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{F}$ は同じ向きである。また $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v} \cdot \Delta t$ より

$$\boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r} > 0$$

よって

$$-\boldsymbol{\nabla} U \cdot \Delta \boldsymbol{r} > 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z < 0 \quad , \qquad \therefore \ U(\boldsymbol{r} + \Delta \boldsymbol{r}) - U(\boldsymbol{r}) < 0$$

つまり、ポテンシャルが減少する向きに運動するため A で安定、B で不安定である。

4-1.放物運動

抵抗がない場合は省略

粘性抵抗のみを考慮した落体の運動を考える。粘性抵抗は抵抗力が速度に比例するので、その比例定数を $B(>0)$ とし、鉛直上向きに z 軸をとると、運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -B\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - mg$$

これを解くと

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -b\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - g \qquad \left(b = \frac{B}{m}\text{とした}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt} + \frac{g}{b}\right) = -b\left(\frac{dz}{dt} + \frac{g}{b}\right)$$

$$\left(\frac{dz}{dt} + \frac{g}{b}\right) = C \cdot \mathrm{e}^{-bt} \qquad (C\text{は定数})$$

$t = 0$ のとき$v = v_0$より

$$\frac{dz}{dt} + \frac{g}{b} = \left(v_0 + \frac{g}{b}\right)\mathrm{e}^{-bt}$$

$$\therefore \quad v = -\frac{g}{b} + \left(v_0 + \frac{g}{b}\right)\mathrm{e}^{-bt}$$

ここで $t \to \infty$ のとき

$$v_\infty = -\frac{g}{b} \quad \cdots \text{終端速度}\ (\text{教科書では}v_\mathrm{f})$$

$t = 0$ のとき$z = 0$とすると

$$z = -\frac{g}{b}t + \left(\frac{v_0}{b} + \frac{g}{b^2}\right)(1 - \mathrm{e}^{-bt})$$

補足

微分方程式

$$\frac{dY}{dt} = -bY$$

を解くと

$$\frac{1}{Y} \cdot \frac{dY}{dt} = -b$$

$$\int \frac{1}{Y} \cdot \frac{dY}{dt} dt = \int -b \cdot dt$$

$$\int \frac{1}{Y} \cdot dY = \int -b \cdot dt$$

$$\log Y = -bt + C'$$

$$\therefore \quad Y = \mathrm{e}^{-bt + C'} = C \cdot \mathrm{e}^{-bt}$$

次に慣性抵抗のみを考慮した落体の運動を考える。このとき抵抗力は速度の２乗に比例するので比例定数を $C(> 0)$ とし、鉛直上向きに z 軸をとると、運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = +C\left(\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{d}t}\right)^2 - mg \quad \leftarrow \text{符号注意}$$

これを解くと

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = c\left(\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{d}t}\right)^2 - g \qquad \left(c = \frac{C}{m}\text{とした}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = cv^2 - g$$

$$= -c\left(\frac{g}{c} - v^2\right)$$

この場合の終端速度は $cv^2 - g = 0$ の解として $v_\infty = \sqrt{\frac{g}{c}}$ で与えられるので

$$\frac{dv}{dt} = -c({v_\infty}^2 - v^2)$$

$$\frac{1}{(v_\infty - v)(v_\infty + v)} \cdot \frac{dv}{dt} = -c$$

$$\frac{1}{2v_\infty}\left(\frac{1}{v_\infty - v} + \frac{1}{v_\infty + v}\right)\frac{dv}{dt} = -c$$

$$\frac{1}{2v_\infty}\int\left(\frac{1}{v_\infty - v} + \frac{1}{v_\infty + v}\right)\frac{dv}{dt} \cdot dt = -ct + C''$$

$$\frac{1}{2v_\infty}\log\frac{v_\infty + v}{v_\infty - v} = -ct + C''$$

$t = 0$ のとき $v = 0$ とすれば $C'' = 0$ となり、v について整理すると

$$v = -v_\infty \frac{1 - \mathrm{e}^{-2ctv_\infty}}{1 + \mathrm{e}^{-2ctv_\infty}}$$

$$\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{d}t} = -v_\infty\left(1 - \frac{2\mathrm{e}^{-2ctv_\infty}}{1 + \mathrm{e}^{-2ctv_\infty}}\right)$$

$$= -v_\infty + 2v_\infty \frac{\mathrm{e}^{-2ctv_\infty}}{1 + \mathrm{e}^{-2ctv_\infty}}$$

$$= -v_\infty + \left\{\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{-2cv_\infty \mathrm{e}^{-2ctv_\infty}}{1 + \mathrm{e}^{-2ctv_\infty}}\right\}$$

$t = 0$ のとき$z = h$ とすると

$$z = -v_\infty t - \frac{1}{c}\log\left(\frac{1 + \mathrm{e}^{-2ctv_\infty}}{2}\right) + h$$

4-2.振動

単振動と単振り子は省略

減衰振動

単振動において速度に比例する抵抗力が働くとする。その比例定数をB とすると運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx - B\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{B}{m}\dot{x} = 0$$

ここで

$$\gamma = \frac{B}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

とおくと

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

この微分方程式の解を $x = \mathrm{e}^{pt}$ だと仮定して代入すると

$$(p^2 + 2\gamma p + {\omega_0}^2)\mathrm{e}^{pt} = 0$$

よって $p^2 + 2\gamma p + {\omega_0}^2 = 0$ が成り立っていればよく、二次方程式の解は

$$p = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2}$$

ここから γ と ω_0 の大小で場合分けして考える

（ｉ）$\omega_0 > \gamma$ のとき

$$p = -\gamma \pm i\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega \quad \leftarrow p_1, p_2 \text{ とする}$$

ただし

$$\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}$$

とした。このとき一般解は、A とB またはC と φ を任意の定数として

$$x = A\mathrm{e}^{p_1 t} + B\mathrm{e}^{p_2 t} = A\mathrm{e}^{(-\gamma + i\omega)t} + B\mathrm{e}^{(-\gamma - i\omega)t}$$

$$= \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A\mathrm{e}^{i\omega t} + B\mathrm{e}^{-i\omega t}\right) = C\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$$

である。これは時間とともに減衰する振動（減衰振動）を表している。

補足

この微分方程式は同次線形常微分方程式といい、これの一般解の最初の等号はこうなるものとして覚えるしかなさそうです。最後の等号では$A = -C\sin\varphi, B = C\cos\varphi$ を代入してさらに、オイラーの公式

$$\mathrm{e}^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\sin\omega t$$

を使っています。ここの微分方程式の解き方はたいして説明してなかったから解ける必要はないかも・・・。

（ⅱ）$\omega_0 < \gamma$ のとき

$$p = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - {\omega_0}^2} \quad \leftarrow p_1, p_2 \text{ とする}$$

このとき一般解は、A とB を任意の定数として

$$x = A\mathrm{e}^{p_1 t} + B\mathrm{e}^{p_2 t} = A\mathrm{e}^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-{\omega_0}^2}\right)t} + B\mathrm{e}^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-{\omega_0}^2}\right)t}$$

これは指数関数的に減衰する関数の和で、振動はしない。これを過減衰という。

（iii）$\omega_0 = \gamma$ のとき

$p = -\gamma$ となり、これだけでは一般解は定まらない。ここで$x(t) = f(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}$ を微分方程式に代入して計算すると

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

である。よって$f(t)$ はt の一次式であるから、A とB を任意の定数として

$$f(t) = A + Bt$$

と表せる。よって一般解は

$$x = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\gamma t}$$

である。これも振動せずに減衰する解であるが、この場合、変位は最も速く 0 に近づくので臨界減衰という。

強制振動

強制振動の運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx - B\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

と表せる。減衰振動のときと同じように文字を置き換えると

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t \qquad \cdots ①$$

となる。この微分方程式は非同次線形常微分方程式といい、これの一般解は、同次線形常微分方程式

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

の一般解に①の特殊解 $x(t)$ を加えた

$$x = A\mathrm{e}^{p_1 t} + B\mathrm{e}^{p_2 t} + x(t)$$

または

$$x = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\gamma t} + x(t)$$

で与えられる。そこで①の特殊解を求める。①に $x(t) = a\cos(\omega t - \alpha)$ を代入すると

$$a\{({\omega_0}^2 - \omega^2)\cos(\omega t - \alpha) - 2\gamma\omega\sin(\omega t - \alpha)\} = \frac{F_0}{m}\cos \omega t$$

三角関数を合成して

$$a\sqrt{({\omega_0}^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\cos\omega t=\frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

ただし

$$\tan\alpha=\frac{2\gamma\omega}{{\omega_0}^2-\omega^2}$$

である。よって

$$a=\frac{F_0}{m\sqrt{({\omega_0}^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

ゆえに特殊解 $x(t)$ は

$$x(t)=\frac{F_0}{m\sqrt{({\omega_0}^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t-\alpha)$$

である。ただし α は

$$\tan\alpha=\frac{2\gamma\omega}{{\omega_0}^2-\omega^2}$$

を満たす。

5-3.回転系

慣性系 $O-xy$ に対して一様な角速度 ω で回転している座標系 $O'-x'y'$ から見た質点の運動を考える。慣性系で位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y)$ の質点の成分は、回転系での位置ベクトル $\boldsymbol{r}'=(x',y')$ の成分を用いて

$$x=x'\cos\omega t-y'\sin\omega t$$
$$y=x'\sin\omega t+y'\cos\omega t$$

と表せる。これを t で２回微分すると

$$\ddot{x}=\left(\ddot{x}'-2\omega\dot{y}'-\omega^2x'\right)\cos\omega t-\left(\ddot{y}'+2\omega\dot{x}'-\omega^2y'\right)\sin\omega t$$
$$\ddot{y}=\left(\ddot{x}'-2\omega\dot{y}'-\omega^2x'\right)\sin\omega t-\left(\ddot{y}'+2\omega\dot{x}'-\omega^2y'\right)\cos\omega t$$

これを

$$a_x=a_{x'}\cos\omega t-a_{y'}\sin\omega t$$
$$a_y=a_{x'}\sin\omega t+a_{y'}\cos\omega t$$

と比較して

$$a_{x'}=\ddot{x}'-2\omega\dot{y}'-\omega^2x'$$
$$a_{y'}=\ddot{y}'+2\omega\dot{x}'-\omega^2y'$$

$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ より

$$F_{x'}=m\ddot{x}'-2m\omega\dot{y}'-m\omega^2x'$$
$$F_{y'}=m\ddot{y}'+2m\omega\dot{x}'-m\omega^2y'$$

ゆえに

$$m\ddot{x}'=F_{x'}+2m\omega\dot{y}'+m\omega^2x'$$
$$m\ddot{y}'=F_{y'}-2m\omega\dot{x}'+m\omega^2y'$$

このとき

$$\boldsymbol{F}_{\text{コリオリ}} = \begin{pmatrix} 2m\omega\dot{y}' \\ -2m\omega\dot{x}' \end{pmatrix} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$$

をコリオリ力といい、

$$\boldsymbol{F}_{\text{遠心力}} = \begin{pmatrix} m\omega^2 x' \\ m\omega^2 y' \end{pmatrix} = m\omega^2 \boldsymbol{r}'$$

を遠心力という。ただし遠心力がこのように表せるのは質点の運動が$\boldsymbol{\omega}$ に垂直な平面内に限られているときだけである。

ここで$\boldsymbol{\omega}$ は角速度ベクトルといい、$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ である。

ここからもう少し一般的に考える。
ある軸のまわりに角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転している任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ の単位時間あたりの回転は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A}$$

と表される。これを用いて

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$$

の両辺を t で微分すると

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$$

さらに t で微分すると

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$$

両辺に m をかけて

$$\boldsymbol{F} = m\{\boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')\}$$

$$\therefore \quad m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$$

この式の $-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$ がコリオリ力、$-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$ が遠心力である。

補足
図がなくてわかりにくくてごめんなさい。すぐ上の右辺の微分について少し。
$\boldsymbol{r}' = (x', y', z')\boldsymbol{e}'$ であり、回転座標やから $\boldsymbol{e}'$ も t で微分しています。

7-2.固定軸をもつ剛体の力学

空間に固定された軸が剛体を貫いており、剛体をその軸の周りに回転させることを考える。この運動の自由度は 1 である。剛体の全角運動量 $\boldsymbol{L}$ は

$$\boldsymbol{L} = \sum_i (\boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i)$$

回転軸を z 軸にとると

$$L_z = \sum_i (x_i m_i \dot{y}_i - y_i m_i \dot{x}_i)$$

また、

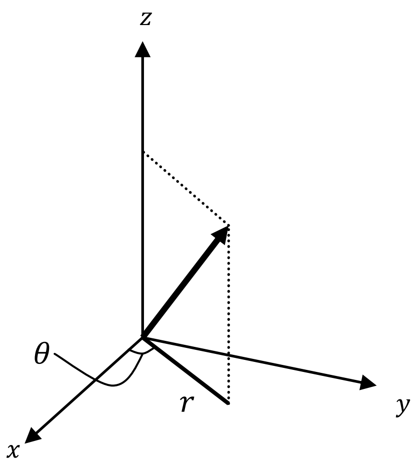
$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = N_z$$

より

$$N_z = \sum_i \left(x_i \times F_{iy} - y_i \times F_{ix}\right)$$

ここで円筒座標を考えると

$$x_i = r_i \cos\theta_i \,, y_i = r_i \sin\theta_i \,\,, z_i = z_i$$



r_i は固定軸からの距離を表しており時間変化しない。$\dot{\theta}_i$ は i によらず$\dot{\theta}_i = \omega$ である。$\dot{x}_i = -r_i \omega \sin\theta_i$，$\dot{y}_i = r_i \omega \cos\theta_i$ を代入すると

$$L_z = \sum_i (x_i m_i r_i \omega \cos\theta_i + y_i m_i r_i \omega \sin\theta_i)$$

$$= \sum_i m_i {r_i}^2 \omega = \omega \sum_i m_i {r_i}^2 = I\omega$$

I は固定軸周りの慣性モーメントであり$I = \sum_i m_i {r_i}^2$ である。

固定軸のまわりの回転の運動方程式は

$$I \cdot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = N_z$$

であり、さらに、物体のある一点の円筒座標での角度 θ を使って

$$I \cdot \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = N_z$$

である。

回転による剛体の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{r_i}^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\dot{x_i}^2 + \dot{y_i}^2\right) = \frac{1}{2}\sum_i m_i\, r_i{}^2\omega^2$$
$$= \frac{1}{2}I\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

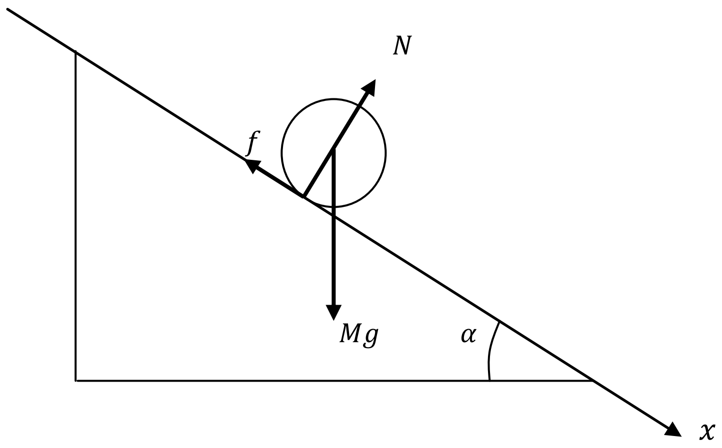
である。

剛体の回転運動と質点の直線運動は対応していて以下に対応関係を示す。

剛体	質点
回転角 θ	位置 x
慣性モーメント I	質量 m
運動方程式 $I\ddot{\theta} = N_z$	運動方程式 $m\ddot{x} = F_x$

7-3.剛体の平面運動

たとえば、あらい面上を円筒形の剛体がすべらずにころがり落ちる場合を考える。



円柱は半径a, 質量M であり、重心のx座標を x_{G} とする。$x_{\mathrm{G}} = 0$ の状態から円柱が角度 θ 転がったとすると

$$x_{\mathrm{G}} = a\theta$$

である。

運動方程式は

$$M\ddot{x}_{\mathrm{G}} = Mg\sin\alpha - f \quad \cdots (1)$$
$$I\ddot{\theta} = fa \quad \cdots (2)$$

となる。

(2)式より

$$f = \frac{I}{a^2}\ddot{x}_{\mathrm{G}}$$

これを(1)式に代入すると

$$M\ddot{x}_{\mathrm{G}} = Mg\sin\alpha - \frac{I}{a^2}\ddot{x}_{\mathrm{G}}$$

$$\left(M + \frac{I}{a^2}\right)\ddot{x}_{\mathrm{G}} = Mg\sin\alpha$$

$$\therefore\quad \ddot{x}_{\mathrm{G}} = \frac{2}{3}g\sin\alpha \quad \left(\because\ I = \frac{1}{2}Ma^2\text{より}\right)$$

補足

ここは授業の最後に急いでやったので $I = \frac{1}{2}Ma^2$を求める方法は授業でやってないです。ということで知りたい人は教科書を読みましょう。

7-4.あとがき

以上で力学 A のシケプリは終わりです。ここまで読んでくれた人はわかると思いますが大部分カットしてます。カットしてるところは上クラのシケプリとか授業ノートとかで各自でたのみます。

では、このシケプリがなんかの役に立つことを祈って・・・

Made in Japan
作成：H. Tom
校正：M. Tom