2-10

No. Date . .

①とすると $\begin{cases} \forall \varepsilon>0,\ \exists \Delta_\varepsilon,\ \text{s.t. } \Delta \succ \Delta_\varepsilon \to \left|\overline{\Sigma}_\Delta(f)-S_1\right| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall \varepsilon>0,\ \exists \Delta_\varepsilon',\ \text{s.t. } \Delta \succ \Delta_\varepsilon' \to \left|\underline{\Sigma}_\Delta(f)-S_2\right| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

ここで $\Delta_\varepsilon'' \succ \Delta_\varepsilon$ かつ $\Delta_\varepsilon'' \succ \Delta_\varepsilon'$ とすると、

$$\Delta \succ \Delta_\varepsilon'' \to \left|\{\overline{\Sigma}_\Delta(f)-\underline{\Sigma}_\Delta(f)\}-(S_1-S_2)\right| = \left|(\overline{\Sigma}_\Delta(f)-S_1)+(S_2-\underline{\Sigma}_\Delta(f))\right|$$

$$\leq \left|\overline{\Sigma}_\Delta(f)-S_1\right|+\left|\underline{\Sigma}_\Delta(f)-S_2\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

よって、$\lim_{|\Delta|\to 0}\left(\overline{\Sigma}_\Delta(f)-\underline{\Sigma}_\Delta(f)\right) = S_1-S_2$

$$0 = S_1-S_2$$

$$\therefore S_1 = S_2 \quad ///$$

定理 函数 f が区間 I 上で Rieman積分可能であるための必要十分条件は、$\underline{S}(f)=\overline{S}(f)$ であり、このとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{S}(f) = \overline{S}(f) \text{ //}$$

(証明)

$\underline{S}(f)=\overline{S}(f)=S(f)$ とおくと、$\overline{S}(f)$ の定義によって

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \Delta_\varepsilon^{(1)},\ \text{s.t. } \Delta \succ \Delta_\varepsilon^{(1)} \to \left|\overline{\Sigma}_\Delta(f)-S(f)\right|<\varepsilon$$

同様に

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \Delta_\varepsilon^{(2)},\ \text{s.t. } \Delta \succ \Delta_\varepsilon^{(2)} \to \left|\underline{\Sigma}_\Delta(f)-S(f)\right|<\varepsilon$$

$\underline{\Sigma}_\Delta(f)$ と $\overline{\Sigma}_\Delta(f)$ の定義により、$\forall \xi$ $\underline{\Sigma}_\Delta(f) \leq \Sigma_{\Delta,\xi}(f) \leq \overline{\Sigma}_\Delta(f)$

$\therefore \Delta_\varepsilon \succ \Delta_\varepsilon^{(1)}, \Delta_\varepsilon^{(2)}$ とすると、

$$\Delta \succ \Delta_\varepsilon \to \forall \xi \quad -\varepsilon < \underline{\Sigma}_\Delta(f)-S(f) \leq \Sigma_{\Delta,\xi}(f)-S(f)$$

$$\leq \overline{\Sigma}_\Delta(f)-S(f) < \varepsilon$$

$$\therefore \forall \xi \quad \left|\Sigma_{\Delta,\xi}(f)-S(f)\right|<\varepsilon$$

よって、$\overline{S}(f)=\underline{S}(f)$ ならば、Rieman積分可能であり、

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(f) = \underline{S}(f) = \overline{S}(f) \text{ //}$$

逆に Rieman積分可能であれば、

$$\forall \varepsilon>0,\ \Delta_\varepsilon,\ \text{s.t. } \Delta \succ \Delta_\varepsilon \to \forall \xi \ \left|\Sigma_{\Delta,\xi}(f)-S(f)\right|<\varepsilon$$

ところが、

任意の代表点に対して成り立つので