10　10回目講義の補足プリント

重要連絡:試験には電卓を持参の事。それ以外の持込は不可。電卓は平方根さえ計算出来れば安価な物で良い。

10.1　標本平均の性質

定理 1. **(統計学における最重要定理)**$X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立に同一の確率分布に従うものとする **(独立同一分布の仮定)**。

$$E(X_1) = \cdots = E(X_n) \equiv \mu, \quad V(X_1) = \cdots = V(X_n) \equiv \sigma^2$$

と置く。このとき、$X_1, \cdots, X_n$ の平均 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は次の 2 式を満足する。

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{1}$$

定理 2. **(標本平均の性質)**$X_1, \cdots, X_n$ は母平均が μ、母分散が σ^2 の母集団からの大きさ n の無作為標本であるとする。このとき標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ は次の 2 式を満足する。

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{2}$$

定理 3. **（標本分散の性質）**$X_1, \cdots, X_n$ は母平均が μ、母分散が σ^2 の母集団からの大きさ n の無作為標本であるとする。このとき標本分散 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ と $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ はそれぞれ次式を満足する。

$$E(s^2) = \sigma^2, \quad E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2. \tag{3}$$

10.2　標本平均の標本分布:　電球の寿命の例

[0] **予備知識：**話に入る前に公式の復習。$Z \sim N(0,1)$ なら、

$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95. \tag{4}$$

[1] **モデル:** 大型電球を作る工場で新型の電球が開発されたとする。新型電球は旧型に比べて寿命が長いことが期待されるとする。新型電球の寿命を調べるため、新型電球 $n = 15$ 個を取り出して、その寿命 $X_1, \cdots, X_{15}$(単位は時間) を計測する。$X_1, \cdots, X_{15}$ は正規母集団 $N(\mu, 100^2)$ からの大きさ 15 の無作為標本と考えてよいとする：

$$X_1, \cdots, X_{15} \sim N(\mu, 100^2). \tag{5}$$

[2]μ **の推定：**何度も勉強した通り、

$$E(\bar{X}) = \mu \tag{6}$$

であるから、未知の μ を $\bar{X}$ の実現値 $\bar{x}$ によって推定することは妥当であろう。例えば、$\bar{x} = 1230$ であったなら、μ は 1230(時間) と推定される。

[3] μ **に関する信頼区間：**前回勉強した信頼区間を作ってみよう。

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{100^2}{15}\right) \tag{7}$$

であるから、

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{100^2}{15}}} \sim N(0,1) \tag{8}$$

である。従って、

$$\begin{aligned} & P\left(-1.96 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{100^2}{15}}} \le 1.96\right) = 0.95 \\ \Longleftrightarrow \quad & P\left(\bar{X} - 1.96\frac{100}{\sqrt{15}} \le \mu \le \bar{X} + 1.96\frac{100}{\sqrt{15}}\right) = 0.95 \end{aligned}$$

となるから。

$$\left[\bar{X} - 1.96\frac{100}{\sqrt{15}},\ \bar{X} + 1.96\frac{100}{\sqrt{15}}\right] \tag{9}$$

は確率 0.95 で未知の μ を含む。この区間の実現値は

$$\left[1230 - 1.96 \times \frac{100}{\sqrt{15}},\ 1230 + 1.96 \times \frac{100}{\sqrt{15}}\right] = [1179.4,\ 1280.6] \tag{10}$$

である[1]。

[4] **今後の議論の方向：**上の議論では、正規分布の仮定と <u>母分散 $\sigma^2 = 100^2$ が既知であること</u> の 2 点が本質的である。しかし、母分散が既知というのは稀であろう。母分散が未知の場合は、標本からこれを推定しなければならない。そのとき、

(i) 未知の母分散 σ^2 を不偏標本分散 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ で推定し、

(ii) $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ の中の未知の σ^2 を s^2 で置き換えて、$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ を作る

というアプローチが自然であろう。そうすると、考えるべき次の問題は、(i) 標本分散 s^2 と S^2 の分布は何か？ **（キーワード = χ^2 分布）** (ii)] $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ の分布は何か？ **（キーワード = t 分布）** の 2 つということになる。

10.3 標本分散の標本分布

カイ 2 乗分布表から、$Y \sim \chi^2(14)$ のとき、

$$P(26.12 \le Y) = 0.025, \quad P(Y \le 5.63) = 0.025, \quad \text{よって、} P(5.63 \le Y \le 26.12) = 0.95 \tag{11}$$

であることが分かる。

電球の寿命の例に戻り、σ^2 が未知の場合を考えてみよう。

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

とおくと、

$$E(s^2) = \sigma^2$$

[1] 後にこの区間を「μ に関する信頼係数 0.95 の信頼区間」と呼ぶ。

が成立するので、未知の σ^2 は s^2 で推定出来るだろう。$Y = (n-1)s^2/\sigma^2$ と置くと、$Y \sim \chi^2(14)$ であるから、

$$
\begin{aligned}
& P(5.63 \le Y \le 26.12) = 0.95 && (12)\\
\iff \quad & P\left(5.63 \le \frac{14\ s^2}{\sigma^2} \le 26.12\right) = 0.95 && (13)\\
\iff \quad & P\left(\frac{14\ s^2}{26.12} \le \sigma^2 \le \frac{14\ s^2}{5.63}\right) = 0.95 && (14)
\end{aligned}
$$

が得られる。即ち、区間

$$
\left[\frac{14\ s^2}{26.12},\ \frac{14\ s^2}{5.63}\right] \tag{15}
$$

は確率 0.95 で未知の σ^2 を含む。$s^2 = 120^2$ が得られたとすると、この区間の実現値は $[14 \times 120/26.12,\ 14 \times 120/5.63] = [64.3,\ 298.4]$ となる。各辺の平方根を取って

$$
P\left(\sqrt{\frac{14\ s^2}{26.12}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{14\ s^2}{5.63}}\right) = 0.95 \tag{16}
$$

も成り立つ。この区間の実現値は [8.02, 17.27] である。

10.4 母分散が未知の場合の標本平均の標本分布： 電球の例の続き

まず次の事実を確認してから本題に入る。$t \sim t(14)$ ならば、t 分布表より

$$
P(-2.145 \le t \le 2.145) = 0.95 \tag{17}
$$

が読み取れる (数表の記号では $t_{0.025}(14) = 2.145$)。

(7) のような区間を構成しようと考えるならば、未知の σ^2 を s^2 で置き換えた

$$
t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{s}
$$

を考えるのが自然だろう。ここで t は正規分布しないことに注意する。t は自由度 $n-1$ の t 分布に従う。今の場合は、$t \sim t(14)$。

従って、(14) より、

$$
\begin{aligned}
& P\left(-2.145 \le \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \le 2.145\right) = 0.95 && (18)\\
\iff \quad & P\left(\bar{X} - 2.145\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + 2.145\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 && (19)
\end{aligned}
$$

即ち、区間

$$
\left[\bar{X} - 2.145\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + 2.145\frac{s}{\sqrt{n}}\right] \tag{20}
$$

は確率 0.95 で未知の μ を含む。ここで　n が大となれば区間の幅が小となることと s が小となれば区間の幅は小となることに注意しよう。区間の幅が小ということは、推定の精度が良いということである。

例えば、$s^2 = 120^2$ が得られたとすると、この区間の実現値は

$$
\left[1230 - 2.145 \times \frac{120}{\sqrt{15}},\ 1230 + 2.145 \times \frac{120}{\sqrt{15}}\right] = [1163.5,\ 1296.5] \tag{21}
$$

となる。

カイ2乗分布表： Y が自由度 m のカイ2乗分布に従うとしたとき、Y の上側 100α％点を与える。

すなわち、P(Y ≧ u) = α となる u を与える。ここで、u はテキスト229頁の $\chi^2{}_{\alpha}(m)$ に等しい

自由度m ＼ α	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01
1	0.00016	0.00098	0.0039	3.84	5.02	6.63
2	0.020	0.051	0.10	5.99	7.38	9.21
3	0.11	0.22	0.35	7.81	9.35	11.34
4	0.30	0.48	0.71	9.49	11.14	13.28
5	0.55	0.83	1.15	11.07	12.83	15.09
6	0.87	1.24	1.64	12.59	14.45	16.81
7	1.24	1.69	2.17	14.07	16.01	18.48
8	1.65	2.18	2.73	15.51	17.53	20.09
9	2.09	2.70	3.33	16.92	19.02	21.67
10	2.56	3.25	3.94	18.31	20.48	23.21
11	3.05	3.82	4.57	19.68	21.92	24.72
12	3.57	4.40	5.23	21.03	23.34	26.22
13	4.11	5.01	5.89	22.36	24.74	27.69
14	4.66	5.63	6.57	23.68	26.12	29.14
15	5.23	6.26	7.26	25.00	27.49	30.58
16	5.81	6.91	7.96	26.30	28.85	32.00
17	6.41	7.56	8.67	27.59	30.19	33.41
18	7.01	8.23	9.39	28.87	31.53	34.81
19	7.63	8.91	10.12	30.14	32.85	36.19
20	8.26	9.59	10.85	31.41	34.17	37.57
21	8.90	10.28	11.59	32.67	35.48	38.93
22	9.54	10.98	12.34	33.92	36.78	40.29
23	10.20	11.69	13.09	35.17	38.08	41.64
24	10.86	12.40	13.85	36.42	39.36	42.98
25	11.52	13.12	14.61	37.65	40.65	44.31
26	12.20	13.84	15.38	38.89	41.92	45.64
27	12.88	14.57	16.15	40.11	43.19	46.96
28	13.56	15.31	16.93	41.34	44.46	48.28
29	14.26	16.05	17.71	42.56	45.72	49.59
30	14.95	16.79	18.49	43.77	46.98	50.89
31	15.66	17.54	19.28	44.99	48.23	52.19
32	16.36	18.29	20.07	46.19	49.48	53.49
33	17.07	19.05	20.87	47.40	50.73	54.78
34	17.79	19.81	21.66	48.60	51.97	56.06
35	18.51	20.57	22.47	49.80	53.20	57.34
36	19.23	21.34	23.27	51.00	54.44	58.62
37	19.96	22.11	24.07	52.19	55.67	59.89
38	20.69	22.88	24.88	53.38	56.90	61.16
39	21.43	23.65	25.70	54.57	58.12	62.43
40	22.16	24.43	26.51	55.76	59.34	63.69
41	22.91	25.21	27.33	56.94	60.56	64.95
42	23.65	26.00	28.14	58.12	61.78	66.21
43	24.40	26.79	28.96	59.30	62.99	67.46
44	25.15	27.57	29.79	60.48	64.20	68.71
45	25.90	28.37	30.61	61.66	65.41	69.96
46	26.66	29.16	31.44	62.83	66.62	71.20
47	27.42	29.96	32.27	64.00	67.82	72.44
48	28.18	30.75	33.10	65.17	69.02	73.68
49	28.94	31.55	33.93	66.34	70.22	74.92
50	29.71	32.36	34.76	67.50	71.42	76.15
60	37.48	40.48	43.19	79.08	83.30	88.38
70	45.44	48.76	51.74	90.53	95.02	100.43
80	53.54	57.15	60.39	101.88	106.63	112.33
90	61.75	65.65	69.13	113.15	118.14	124.12
100	70.06	74.22	77.93	124.34	129.56	135.81

t分布表： t が自由度mの t 分布に従うとしたとき、t の上側 100α％点を与える。(テキスト228頁参照)

すなわち、P(t ≧u) = α となる u を与える。ここで u = t_α(m) である。

自由度m ＼ α	0.1	0.05	0.025	0.01
1	3.078	6.314	12.706	31.821
2	1.886	2.920	4.303	6.965
3	1.638	2.353	3.182	4.541
4	1.533	2.132	2.776	3.747
5	1.476	2.015	2.571	3.365
6	1.440	1.943	2.447	3.143
7	1.415	1.895	2.365	2.998
8	1.397	1.860	2.306	2.896
9	1.383	1.833	2.262	2.821
10	1.372	1.812	2.228	2.764
11	1.363	1.796	2.201	2.718
12	1.356	1.782	2.179	2.681
13	1.350	1.771	2.160	2.650
14	1.345	1.761	2.145	2.624
15	1.341	1.753	2.131	2.602
16	1.337	1.746	2.120	2.583
17	1.333	1.740	2.110	2.567
18	1.330	1.734	2.101	2.552
19	1.328	1.729	2.093	2.539
20	1.325	1.725	2.086	2.528
21	1.323	1.721	2.080	2.518
22	1.321	1.717	2.074	2.508
23	1.319	1.714	2.069	2.500
24	1.318	1.711	2.064	2.492
25	1.316	1.708	2.060	2.485
26	1.315	1.706	2.056	2.479
27	1.314	1.703	2.052	2.473
28	1.313	1.701	2.048	2.467
29	1.311	1.699	2.045	2.462
30	1.310	1.697	2.042	2.457
31	1.309	1.696	2.040	2.453
32	1.309	1.694	2.037	2.449
33	1.308	1.692	2.035	2.445
34	1.307	1.691	2.032	2.441
35	1.306	1.690	2.030	2.438
36	1.306	1.688	2.028	2.434
37	1.305	1.687	2.026	2.431
38	1.304	1.686	2.024	2.429
39	1.304	1.685	2.023	2.426
40	1.303	1.684	2.021	2.423
41	1.303	1.683	2.020	2.421
42	1.302	1.682	2.018	2.418
43	1.302	1.681	2.017	2.416
44	1.301	1.680	2.015	2.414
45	1.301	1.679	2.014	2.412
46	1.300	1.679	2.013	2.410
47	1.300	1.678	2.012	2.408
48	1.299	1.677	2.011	2.407
49	1.299	1.677	2.010	2.405
50	1.299	1.676	2.009	2.403
60	1.296	1.671	2.000	2.390
70	1.294	1.667	1.994	2.381
80	1.292	1.664	1.990	2.374
90	1.291	1.662	1.987	2.368
100	1.290	1.660	1.984	2.364