プリントＮｏ．３　(10/05/28)

◎よみかえ定理の例◎

$A \to B \equiv \neg(A \wedge$

$A \to B \equiv \neg A \vee B$

＊ $\equiv \neg\neg(\neg A \vee B)$ ←

$\equiv \neg(\neg\neg A \wedge \neg B)$ ←

$\equiv \neg(A \wedge \neg B)$

○否定・矛盾に関する規則同士の関係と、命題論理体系間の関係

最小論理において、

- 矛盾規則は二重否定除去規則によって証明可能
- 二重否定除去規則は排中律＋矛盾規則によって証明可能
- 排中律は二重否定除去規則のみで証明可能

さらに、

- 矛盾規則は最小論理では証明不可能
- 排中律は（したがって二重否定除去規則も）直観主義論理では証明不可能

MはIより強く、IはCより強い

○読み替え定理と置き換え定理

・読み替え定理：証明可能な論理式の中の英大文字を任意の論理式に読み替えても、また証明可能な論理式が得られる。

＊では、おき

F：¬¬(

A：¬(¬

・置き換え定理：$\vdash$A↔A’のとき、Ａを含む論理式Ｆと、Ｆの中のＡの現れの一つをＡ’に置き換えてできる論理式Ｆ’について、$\vdash$F↔F’が成立する。

A’：¬¬A∧

F’：¬(¬¬

を使っても

→証明はプリントNo4.

○古典命題論理の標準的意味論：真理表とトートロジー

真理値とは、Ｔ（真）、Ｆ（偽）の２つである。（二値原理）
任意の論理式φに対してその真理値を対応させる関数ｖが、以下のように定義される。

１．Ｐを×以外の命題記号としたときｖ（Ｐ）＝Ｔまたはｖ（Ｐ）＝Ｆのいずれかである。
また、ｖ（×）＝Ｆである。

２．φ、ϕを任意の論理式としたとき、ｖ（φ∧ϕ）、ｖ（φ∨ϕ）、ｖ（φ→ϕ）は、ｖ（φ）、ｖ（ϕ）に応じて、以下のように定まる。

ｖ（φ）	ｖ（ϕ）	ｖ（φ∧ϕ）	ｖ（φ∨ϕ）	ｖ（φ→ϕ）
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

違和感があるけど。
二値原理では
「間違いである」といいきれ
ないものは真であると
…すると らしい。。。

1. 表2の∧に関する欄からアをうめる
2. 表3から イ2つを対応させる。
3. アに対する 表3から ウをうめる。
4. 2つのイとVに関する欄でエをうめる。
5. ウとエ、と→に関する欄でオがうまる。

オがすべてTである⇔ この式はトートロジー

P	Q	¬	(P∧Q)	→	(¬P	∨	¬Q)
T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	T	T
		ウ	ア	オ	イ	エ	イ

TFすべての対応を考えるので、P,Q,R…の個数をaとすると 2^a 行の欄がいる。

B)では。

A≡¬¬Pで Pを¬A∨Bで よみかえた。

ドモルガン ¬(P∨Q)≡¬P∧¬Q の Pを¬A、QをBで よみかえた。

…換定理 ¬A∨B) A∨B) ¬B A∧¬B) 証明できる。

3. φを任意の論理式としたときv(¬φ)は、v(φ)に応じて、以下のように定まる。

v(φ)	v(¬φ)
T	F
F	T

・論理演算子は、真理値ないし真理値の対から真理値への関数(真理関数)とみなすことができる。真理関数がその演算子の意味を与えていると考える。(真理値意味論)

・φに含まれる×以外の命題記号の各々がもつ真理値の可能なすべての組み合わせに対して、v(φ)がつねにTとなるとき、φをトートロジー(恒真式、論理的真理)という。

・任意の論理式φについて、表を作成することで、×以外の命題記号の各々がもつ真理値のすべての組み合わせに対する真理値が計算できる。この表を真理表と呼ぶ。とくに、真理表を書くことによって、φがトートロジーであるか否かを決定することができる。このような手続きのことを決定手続きと呼ぶ。(さきにみた証明の手続きと比較せよ。)

(e.g. 例をこのプリントの上部に示す。

○命題論理の性質

・命題論理の無矛盾性:各命題論理体系は、無矛盾である。すなわち、×が証明されることはない。

・命題論理の健全性:各命題論理体系は、真理値意味論に対して健全である、すなわち、任意の論理式φについて、⊢φ ⇒ φはトートロジー

証明されたものは トートロジー

・古典命題論理の完全性:古典命題論理体系は、真理値意味論に対して完全である、すなわち、任意の論理式φについて、φはトートロジー ⇒ ⊢φ

トートロジーなら 証明可能

☆参考文献

野矢茂樹著『論理学』、東京大学出版会、1994.

金子洋之著『記号論理入門』、産業図書、1995.

戸田山和久著『論理学をつくる』、名古屋大学出版会、2000.