Date . . No.

証明

$$\begin{cases} \Delta := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\} \\ V_\Delta(f) := \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \right)(x_i - x_{i-1}) \end{cases}$$

fは[a, b]でC¹級より、$i=1, 2 \cdots n$に対して、

$\sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$, $\inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$ を与えるxの値をx_i', x_i''とおくと、

$$\frac{f(x_i') - f(x_i'')}{x_i' - x_i''} = f'(c_i)$$ なるc_iがx_i'とx_i''の間に存在する。(∵平均値の定理)

$$\therefore \frac{\sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)}{x_i' - x_i''} = f'(c_i)$$

ここで、

$$|V_\Delta(f)| \le \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \right) |\Delta|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left((x_i' - x_i'') f'(c_i) \right) |\Delta|$$

$$\le \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) |f'(c_i)| \right\} \cdot |\Delta|$$

ここで、$f'(c_i)$のうち、$i=1, 2 \cdots n$で絶対値が最大のものを、$f'(c)$とおくと

$$|V_\Delta(f)| \le \sum_{i=1}^{n} \{ (x_i - x_{i-1}) |f'(c)| \} \cdot |\Delta|$$

$$= |f'(c)| \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \right\} \cdot |\Delta|$$

$$= (b-a) |f'(c)| \cdot |\Delta|$$

ここで、fは[a, b]でC¹級より、$|f'(c)| < +\infty$ (有限)

$\therefore (b-a)|f'(c)| < +\infty$ (〃)

よって、$\lim_{|\Delta| \to 0} (b-a)|f'(c)| \cdot |\Delta| = 0$

$\lim_{|\Delta| \to 0} V_\Delta(f) = 0$

よって、fはRiemann積分可能である。