$$= \frac{dH_k(x)}{dx} + xH_k(x)$$

$= (k-1$ 次の多項式$) + (k+1$ 次の多項式$)$
(∵帰納法の仮定)

$= (k+1$ 次の多項式$)$

よって $H_{k+1}(x)$ は $k+1$ 次の多項式である.

〈解答2〉

$H_k(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \dfrac{d^k}{dx^k} e^{\frac{x^2}{2}}$ の両辺を x について微分して

$$\frac{d}{dx} H_k(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k} e^{\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} e^{\frac{x^2}{2}} \quad (∵積の微分法)$$

$$= -xH_k(x) + H_{k+1}(x)$$

$\therefore \left(\dfrac{d}{dx} + x\right) H_k(x) = H_{k+1}(x)$ (← これは(2)でやる証明まんま)

ここで
- ・$H_k(x)$ は k 次の多項式 (∵帰納法の仮定)
- ・$\dfrac{d}{dx}H_k(x)$ は $k-1$ 次の多項式
- ・$xH_k(x)$ は $k+1$ 次の多項式

であるから,

$H_{k+1}(x)$ は $k+1$ 次の多項式である.

以上(i)(ii)より すべての $n \in \mathbb{N}$ について ☆が成り立つことが示された.

〈補足〉

この $H_n(x)$ は原子の存在確率? みたいなのの数式の一部らしいですが, 詳しいことはよくわかりません.

要は一般解を見つけるのはムリっぽいということです.