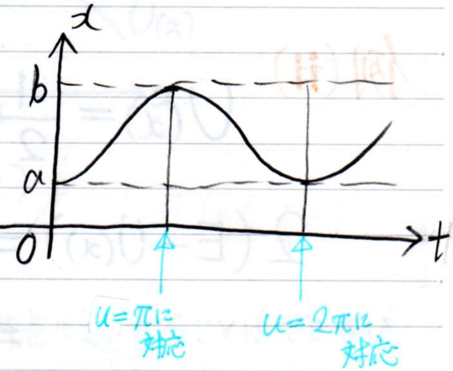
$$(x-a)(b-x) = (b-a)\sin^2\frac{u}{2}(b-a)\left(1-\sin^2\frac{u}{2}\right)$$
$$= (b-a)^2\sin^2\frac{u}{2}\cos^2\frac{u}{2}$$
$$= \frac{1}{4}(b-a)^2\sin^2 u$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{2}(b-a)\sin u$$



$\frac{dx}{du}$ の符号は $\sin u$ の符号と一致する.

よって、$\frac{dx}{dt}$ の符号も $\sin u$ の符号と一致する.

⑤より、
$$\int \frac{du}{\sqrt{V\left(\frac{1}{2}(a+b)+(a-b)\cos u\right)}} = t + (\text{定数}) \cdots\cdots ⑦$$

$$\left(\because\ ⑤ \Leftrightarrow \pm\int \frac{du}{\sqrt{V}}\cdot\frac{\sin u}{|\sin u|} = t + (\text{定数})\right)$$

$t=0$ で $u=0$ とすれば、
$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{V}} = t$$

V は、u の周期 2π の正値関数なので、
$$\int_u^{u+2\pi}\frac{du}{\sqrt{V}} = \int_0^{2\pi}\frac{du}{\sqrt{V}} = T$$

とすれば
$$\int_u^{u+2\pi}\frac{du}{\sqrt{V}} = \int_0^u\frac{du}{\sqrt{V}} + \int_u^{u+2\pi}\frac{du}{\sqrt{V}} = t + T$$
$$\therefore u(t+T) = u(t) + 2\pi$$

⑥より、x も T を周期とする時間 t の周期関数
であることがわかる。

例(ii)

$$U(x) = \frac{1}{2}\cos^2 x^2 \Rightarrow X = -U'(x) = -\omega^2 x$$

(単振動)

$$2(E - U(x)) = 2\left(E - \frac{1}{2}\cos^2 x^2\right)$$

$$= \omega^2(a - x)(x + a) \quad \left(a = \frac{\sqrt{2E}}{\omega}\right)(\omega > 0)$$

運動は、$|x| < a$ における周期運動である。

$V = \omega^2$ なので、$T = \int_0^{2\pi} \frac{du}{\sqrt{\omega^2}} = \frac{2\pi}{\omega}$

⑦より、

$$u = \omega t + \beta$$

よって、⑥より、

$$x = -a\cos(\omega t + \beta)$$

$\beta = \alpha + \pi$ とすれば、

$$x = a\cos(\omega t + \alpha)$$

12. 質点の平衡及びその安定性

$F = -U'(x) = X$ より、

可動区間の端 $x = a$ で $U'(a) = 0$ の場合、
$x = a$ での速度が 0 であるので、質点は動かない。
このような点を平衡点という。