Date　・　・　No.

従って、

行 a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} は、x_i' 軸方向の単位ベクトル $\vec{e_i}'$ の x, y, z 成分

列 a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} は、x_i 軸方向の単位ベクトル $\vec{e_i}$ の x', y', z' 成分

ここで、

$$\vec{e_i}' \cdot \vec{e_k}' = \underbrace{\delta_{ik}}_{\text{クロネッカーのデルタ}}, \quad \vec{e_i} \cdot \vec{e_k} = \delta_{ik}$$

に注意すると、

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}, \quad \sum_{j=1}^{3} a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik}$$

よって、行列 $T = (a_{ij})$ は

$$T\,{}^tT = {}^tT\,T = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす正方行列である。（${}^tT$ は T の転置行列）

これを直行行列という。

①より、$\det T = |T| = \pm 1$ （座標系を右手系にとれば、$\det T = 1$）

$$\vec{e_k} = \sum_{i=1}^{3} a_{ik} \vec{e_i}' \text{ より、}$$

一般のベクトル $\vec{v}$

$$\vec{v} = \sum_i v_i' \vec{e_i}' = \sum_k v_k \vec{e_k} = \sum_{i,k} a_{ik} v_k \vec{e_i}'$$

Date　・　・　No.

$$\therefore \left.\begin{aligned} v_x' &= a_{11}v_x + a_{12}v_y + a_{13}v_z \\ v_y' &= a_{21}v_x + a_{22}v_y + a_{23}v_z \\ v_z' &= a_{31}v_x + a_{32}v_y + a_{33}v_z \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (*)$$

・ベクトル…座標変換に際し、
　(＊)を満足する三つの成分で表される量

・スカラー…座標変換に際し、その値が不変なもの。

例　二次元極座標を用いた速度・加速度の成分

$$v_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}(r\cos\varphi) = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}(r\sin\varphi) = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$$

これを、
$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
とした。

(＊)に代入すると、

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = \dot{\varphi}$$

同様に、$\ddot{x}$と$\ddot{y}$を求めて(＊)に代入すると、

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$$

これは、4の例(i)と一致する。 ⟶ 3次元