$t=0$ で $r=a(1-e)$ とすれば、

r が $a(1+e)$ に達するまでの間では、⑭より、

$$t=\frac{1}{\sqrt{-2E}}\int_{a(1+e)}^{r}\frac{r\,dr}{\sqrt{\{r-a(1-e)\}\{a(1+e)-r\}}}$$

11 節⑥に対応して、

$$r=a(1-e\cos u)\cdots\cdots ⑮'$$

とおくと、（注：$u\neq\frac{1}{r}$）

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{dt}$$ と ⑭より、

$$\frac{du}{dt}=\frac{dr}{dt}\cdot\frac{1}{\left(\frac{dr}{du}\right)}=\pm\frac{\sqrt{g(r)}}{r}\cdot\frac{1}{ae\sin u}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\sqrt{g(r)}&=\sqrt{-2E}\sqrt{\{r-a(1-e)\}\{a(1+e)-r\}}\\&=\sqrt{-2E}\sqrt{(ae)(1+\cos u)(ae)(1-\cos u)}\\&=\sqrt{-2E}\,ae\left|\sin u\right|\end{aligned}$$

$\frac{dr}{du}=ae\sin u$ の符号と $\frac{dr}{dt}$ の符号は一致するから、

$$\frac{du}{dt}=\frac{\sqrt{-2E}}{r}=\frac{\sqrt{-2E}}{a(1-e\cos u)}$$

$$\therefore\ t=\frac{a}{\sqrt{-2E}}\int_0^u(1-e\cos u)\,du=\frac{a}{\sqrt{-2E}}(u-e\sin u)\cdots\cdots ⑯$$

よって、運動の周期は、

$$T=\frac{2\pi a}{\sqrt{-2E}}=2\pi a\sqrt{\frac{a}{\mu}}\qquad(\because ⑮)$$

$$\therefore\ T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

つまり、$\boxed{\text{惑星が太陽の周りを一周する周期の2乗は、平均距離の3乗に比例する。}}$

Keplerの第3法則

中心Oの周りの平均角速度 $n=\dfrac{2\pi}{T}$ を用いれば、⑯より、

$$\boxed{nt = u - e\sin u}$$

Keplerの方程式

☆ u の幾何学的意味

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}$$ より、

$$r(1+e\cos\varphi)=a(1-e^2)$$

$$re\cos\varphi = a-r-ae^2$$

$$= ae(\cos u - e) \quad (\because ⑮')$$

$$\therefore r\cos\varphi = a(\cos u - e)$$

$0\leqq\varphi\leqq\pi$

$$r\sin\varphi=\sqrt{r^2-r^2\cos^2\varphi}$$

$$=\sqrt{r^2-a^2(\cos u-e)^2}$$

$$=a\sqrt{(1-e\cos u)^2-(\cos u-e)^2}$$

$$=a\sqrt{(1-e)(1+\cos u)(1+e)(1-\cos u)}$$

$$=a\sqrt{1-e^2}\sin u \quad (0\leqq u\leqq\pi)$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} r\cos\varphi &= a(\cos u-e) \\ r\sin\varphi &= a\sqrt{1-e^2}\sin u \end{aligned}\right\} \cdots\cdots ⑰$$