数学Ⅱ シケプリ

監修 2010年度

理ⅡⅢ19組 シケ対

使用上の注意

一、教科書が最良のシケプリです。

一、本シケプリは、教科書の中で大事そうなところをピックアップしたものです。
一、本シケプリの内容は基本中の基本と思われます。従って、本シケプリの内容を全て把握したからといって高得点が期待できるわけではありません。思うに、計算ができれば「可」はくるでしょう。証明問題ができたら「優」がくるでしょう。「優」が欲しい方は、計算を完璧にしたうえで、証明問題の対策をしてみてください。一次独立とか正則であるための条件とか重要そうですよね。

(以下、当然のことをツラツラ書いただけなので、読み飛ばしてくださって結構です。)

一、計算ができるようになるには、実際に自分の手を動かして計算してみることが重要です。頭の中で理解することと実際にできることは異なります。従って、教科書の練習問題や隔週の演習の問題を何問か自分で解いてみることを推奨します。
一、本シケプリの本編は手書きです。明らかに字が汚いですがご容赦ください。申し訳ないです。
一、本編はスキャナーで読み取ったものなので、全体的に薄いかもしれません。コントラストの調整等を行って字が濃くなるように善処はしました。これ以上は勘弁してください。

余白ができたのでテキトーな画像で埋めておきます。

本編

第2講

・一次独立，一次従属

一次独立：「$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ だけ」
を満たす時，$a_1 \sim a_n$ は一次独立。
一つでも $\alpha_i \neq 0$ があれば $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n \neq 0$。
どの矢線ベクトルも他の矢線ベクトルの一次結合で表せない。

一次従属：一次独立でない時

空間における一次独立なベクトルは以下の3種
(i) 1本の0でないベクトル
(ii) 2本の三角形を作るベクトル
(iii) 3本の四面体を作るベクトル

平面の任意のベクトルは，その平面中の2本の一次独立なベクトルの一次結合で一意的に表せる。空間の場合は3本。
この性質を使って，例えば「平面の3本のベクトルは一次従属である」ことを表せる。

proof. a, b が一次独立とすると，a, b で平面の任意のベクトルを表せるから，$c = \alpha a + \beta b$ となる。移項し，$\alpha a + \beta b - c = 0$ となる。これは，一次独立の定義
「$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha a_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$」
に反するから，一次従属。 ■

・内積
$a \cdot b$ を $\langle a, b \rangle$ と表現することもある

$a \cdot b \leq |a||b|$ （コーシー・シュワルツの不等式）

・外積

大きさ $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ = 斜線部($\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が張る平行四辺形)の面積

向き: $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ に向かって右手を閉じる(握る)時に、右手親指が立つ方向

- $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$
- $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (平行四辺形が潰れる) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は一次従属
- $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$
- これの絶対値が、$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の張る平行四面体体積 V (→サラスの公式)

サラスの公式

$\mathbf{a} = (a, b, c)$ $\mathbf{b} = (d, e, f)$ $\mathbf{c} = (g, h, l)$ とすると

$$V = |(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}| = \left| \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g \\ h \\ l \end{bmatrix} \right| \quad \left(= \det \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & l \end{bmatrix} \right)$$

$$= |ael + cdh + gbf - gec - ldb - ahf|$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bf - ec \\ cd - fa \\ ae - db \end{bmatrix}$$

第3講

変数の自由度 = 解の自由度 + 解存在の自由度

- 変数の自由度：変数の個数
- 解の自由度：解のなす図形の次元（点なら0，直線なら1，平面なら2，…）
- 解存在の自由度：解が存在する範囲の自由度

（連立方程式を縦に区切って，変数の係数を列ベクトルと見た時，その列ベクトルの1次結合がなす図形の次元

例）$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$　$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ の一次結合のなす図形の次元）

第4講

・雑多な定義（その1）

- 行列 A の (i,j) 成分を a_{ij} 等と書き，$A=[a_{ij}]$ と表す．
- $A=[a_{ij}]$ の成分のうち，$a_{11}, a_{22}, \cdots$ を「対角成分」と呼ぶ。
- 対角成分以外全て0の n 次正方行列を「(n 次)対角行列」と呼ぶ。
- 対角成分が全て1，他が全て0の n 次正方行列を「(n 次)単位行列」と呼び，E 又は E_n で表す。
- 成分が全て0の行列を「零行列」と呼び，O や $O_{m,n}$ と表す
- $i>j$ となる (i,j) 成分が全て0の行列を「上三角行列」，$j>i$ となる (i,j) 成分が全て0の行列を「下三角行列」と呼ぶ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & O \\ & a_{22} & \\ O & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & & O \\ & 1 & \\ O & \ddots & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & & * \\ & * & \\ O & \ddots & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & & O \\ & * & \\ * & \ddots & * \end{bmatrix}$$

対角行列　　単位行列　　上三角行列　　下三角行列

対角成分

・積の成分表示

$m \times n$ 行列 $A=[a_{ij}]$ と $n \times l$ 行列 $B=[b_{ij}]$ の積 AB の (i,j) 成分は

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

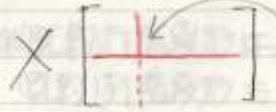
・雑多な定義(その2)

・逆行列を持つn次正方行列を「正則行列」と呼ぶ。A^{-1}等と表す。

・$A=[a_{ij}]$の行と列を交換した行列を「転置行列」と呼び${}^{t}A$で表す。

・小行列

行列Aの行と列をいくつかに区切り、区切ってできる各ブロックを「小行列」と呼ぶ。区切る時は、端から端まで一直線に区切る。途中で区切るのをやめてはいけない。



途中で区切るのをやめているから×。
点線まで区切れば○。

小行列は成分と同様に計算可能。特に、積ABは、Aの列の区切り方とBの行の区切り方が同じ場合、小行列を成分とみなして計算可能。

ここ と ここ の区切り方が同じから この様に なる

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} C & D \\ E & F \end{bmatrix} \\ \alpha\text{列}\ \beta\text{列} \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \alpha\text{行} \\ \beta\text{行} \end{array} = \begin{bmatrix} CG+DH \\ EG+FH \end{bmatrix}$$

第5講

・行列の基本変形

行倍：i行の成分を全て$\alpha\neq0$倍

行和：i行にj行のスカラー倍を足す ($i\neq j$)

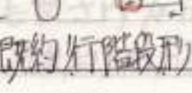
行換：i行とj行を交換 ($i\neq j$)

列倍，列和，列換も然り。

・雑多な定義(言葉より図で納得した方が早いかも)

$$\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

階数標準形



簡約行階段形

(注) 行に関するかなめが1でなかったり、かなめより上に0でないものがある場合は単に「行階段形」。

既約列階段形

(注) 列に関するかなめが1でなかったり、かなめより左に0でないものがある時、単に「列階段形」と呼ぶ。

かなめ：各行の最左非零成分を行に関するかなめ、各列の最上非零成分を列に関するかなめと呼ぶ。

※(既約)行階段形は、行に関する基本変形を有限回行えば必ず作れる。
(既約)列階段形も、列に関する 〃

※(既約)行階段形の転置行列は、(既約)列階段行列

※ 既約行階段行列かつ既約列階段行列 ⇔ 階数標準形

※ 既約行(ry, 既約列(ry, 階数標(ry は、基本変形のやり方に依らず、一意に定まる。

・階数

行列 A の階数標準形に現れる1の個数を A の階数と呼び、$\mathrm{rank}\,A$ で表す。

$\mathrm{rank}\,A$ = A の階数標準形に(ry
= A の行階段形のかなめの個数
= A の列階段形のかなめの個数

・(ガウスの)変数消去法（P116やP117を見て真似して習得すべし）

左の列から順番に非零成分の存在する列を探す。最初に非零成分が見つかった列の中の最も良さげな成分が一番上になるように行操作する。その最も良さげな成分より下の成分が全て0になるように行和を行う。次に、それより右の列について、左から順番に、2行目

以下に初めて非零成分の存在する列を探す。見つかったら、その列の中の非零成分で一番良さげな成分が、上から2番目にくるように行換する。その"一番良さげな成分"より下の成分が全て0になるように行和する。
これを、サーチする列が一番右にくるまで繰り返す。[行階段形の完成]
下にある行に関するかなめから順に、そのかなめの上の成分が全て0になるように行和をし、行倍でかなめ自身を1にする操作を、一番上の行に関するかなめまで繰り返す。[既約行階段形の完成]

・階数と一次独立
列ベクトル $a_1 \cdots a_n$ が一次独立 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}[a_1 \cdots a_n] = n$

第6講
・係数行列と拡大係数行列
係数行列…連立方程式の各変数の係数を並べたもの
拡大係数行列…　〃　と定数項を並べたもの

ex) $\begin{cases} x+y = 3 \\ -x+z=-1 \\ -2x-y+2z=-4 \end{cases}$ から $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ が係数行列、$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ が拡大(行列)

・n元一次連立方程式の解き方
(i) 拡大係数行列を既約行階段形に直す
(ii) 対角成分に1又は-1のみが並ぶように、(i)の既約行階段形を $n \times (n+1)$ 行列に整形する。具体的には、対角成分の存在しないところに-1を挿入する。
(iii) (ii)の行列右端の列ベクトルに、対角成分に-1が存在する列ベクトルの(?)スカラー倍したものを足したものが連立方程式の解。但し、(ii)で-1を挿入したことによってできた空白は0とみなす。

ex) $\begin{cases} x+y=3 \\ -x+z=-1 \\ -2x-y+2z=-4 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{(ii)}]{\text{(i)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(iii)}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(例) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=4 \\ x_3+2x_4+3x_5=2 \\ x_5=1 \end{cases}$ $\rightarrow \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&4 \\ 0&0&1&2&3&2 \\ 0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(i)} \begin{bmatrix} 1&1&0&-1&0&4 \\ 0&0&1&2&0&-1 \\ 0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix}$

(ii) 対角成分に1又は-1が並ぶように-1を挿入して5×6行列に $\rightarrow \begin{bmatrix} 1&1&0&-1&0&4 \\ 0&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&2&0&-1 \\ 0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix}$

(iii) 右端の列ベクトルと、対角成分に-1が存在する列ベクトルのスカラー倍の和 $\rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

"特殊解"　"基本解"

・解の存在条件
係数行列と拡大係数行列の階数が同じ場合のみ、解が存在。

・バランス公式(再掲)
変数の自由度 = 解の自由度 + 解存在の自由度
(変数の個数) = (基本解の個数) + (係数行列の階数)
└ 0なら点、1なら直線、2なら平面、3なら空間

第7講
・行列方程式の解法
前回までは $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$ という列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関する方程式を解いてきた。
今回は、$AX=P$ という行列 X に関する方程式を解く。$X=[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2 \cdots \boldsymbol{x}_n]$
$P=[\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2 \cdots \boldsymbol{p}_n]$ と分けてしまえば、

$$AX=P \Leftrightarrow A[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2 \cdots \boldsymbol{x}_n]=[\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2 \cdots \boldsymbol{p}_n]$$
$$\Leftrightarrow A\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{p}_1,\ A\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{p}_n$$

となり、前回の「$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$」型の方程式の組み合わせで解けることがわかる。
これを公式化したのが以下

(i) 拡大係数行列 $[AP]$ を既約行階段形に基本変形する。
(ii) 対角成分が全てかなめになるように -1 を挿入し、$n\times(n+\ell)$ 行列に整形する。但し、ℓ とは、P の列数 (X の列数)
(iii) 右端の $n\times\ell$ 行列に、対角成分に -1 が存在する列ベクトルを並べた $n\times(n-r)$ 行列 [但し、$r=\mathrm{rank}B$] に $(n-r)\times\ell$ 行列 [但し、成分は全てパラメータ] を右からかけたものの和が X になる。

(EX) $AX=P$ (A は 3×5 行列、P は 3×3 行列、$\Rightarrow X$ は 5×3 行列)
拡大係数行列 $[AP]$ が $\begin{bmatrix} 1&2&3&0&0&1&6&4 \\ 0&0&0&1&0&7&2&9 \\ 0&0&0&0&1&5&8&3 \end{bmatrix}$ になったとする。

$$[AP] \xrightarrow{\text{(i)}} \begin{bmatrix} 1&2&3&0&0&1&6&4 \\ 0&0&0&1&0&7&2&9 \\ 0&0&0&0&1&5&8&3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(ii)}} \begin{bmatrix} 1&2&3&0&0&1&6&4 \\ &-1&&&&&& \\ &&-1&&&&& \\ 0&0&0&1&0&7&2&9 \\ 0&0&0&0&1&5&8&3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(iii)}} X = \begin{bmatrix} 1&6&4 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 7&2&9 \\ 5&8&3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2&3 \\ -1&0 \\ 0&-1 \\ 0&0 \\ 0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11}&t_{12}&t_{13} \\ t_{21}&t_{22}&t_{23} \end{bmatrix}$$ (t_{ij} はパラメータ)

・行列方程式が解を持つ条件
$AX=P$ が解をもつ $\Leftrightarrow \mathrm{rank}A = \mathrm{rank}[AP]$

・逆行列の求め方
行列方程式 $AX=E$ を解けばよい。尚、A を n 次正方行列とすれば、
A が逆行列をもつ $\Leftrightarrow$ $AX=E$ が解をもつ
$\Leftrightarrow \mathrm{rank}A = \mathrm{rank}[AE] = \mathrm{rank}[EA] = n$
である。

・「正則行列」の様々な表現
n 次正方行列 A が正則行列 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$
$\Leftrightarrow$ A の既約行階段形は単位行列
$\Leftrightarrow$ $AC=E$ を満たす C が存在
$\Leftrightarrow$ $DA=E$ を満たす D が存在

⇔ Aのnコの行ベクトルが一次独立
⇔ Aのnコの列ベクトルが一次独立
⇔ Aは有限個の基本行列の積

・基本行列
以下の $S_n(i;\alpha)$, $W_n(i,j;\alpha)$, $K(i,j)$ を基本行列と呼ぶ

$$S_n(i;\alpha) = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \quad\quad i\text{列} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \\ i\text{行} \\ \\ n\text{次} \end{array}$$

対角成分 $= \begin{cases} \alpha & [(i,i)\text{成分}] \\ 1 & [\text{その他}] \end{cases}$ 他 $= 0$

$$W_n(i,j;\alpha) = \begin{array}{c} \quad\quad j\text{列} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \alpha & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \\ i\text{行} \\ \\ n\text{次} \end{array}$$

対角成分 $= 1$　(i,j)成分 $= \alpha$　他 $= 0$

$$K(i,j) = \begin{array}{c} \quad\quad i\text{列} \quad j\text{列} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & 0 & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ n\text{次} \end{array}$$

対角成分 $= \begin{cases} 0 & [(i,i),(j,j)\text{成分}] \\ 1 & [\text{その他}] \end{cases}$　$(i,j),(j,i)$成分 $= 1$　その他 $= 0$

(教科書P167のキレイな図参照)
Aを $m \times n$ 行列とすると…

Aに左から $S_m(i;\alpha)$ をかけると、Aの i 行を α 倍する
　〃　$W_m(i,j;\alpha)$ をかけると、Aの i 行に j 行の α 倍を足す
　〃　$K_m(i,j)$ をかけると、Aの i 行と j 列を交換する
Aに右から $S_n(i;\alpha)$ をかけると、Aの i 列を α 倍する。
　〃　$W_n(i,j;\alpha)$ をかけると、Aの j 列に i 列の α 倍を足す。
　〃　$K_n(i,j)$ をかけると、Aの i 列と j 列を交換する

尚、基本行列は全て正則行列。また、
$S(i;\alpha)^{-1} = S(i;\alpha^{-1})$　$W(i,j;\alpha)^{-1} = W(i,j;-\alpha)$　$K(i,j)^{-1} = K(i,j)$
${}^tS(i;\alpha) = S(i;\alpha)$　${}^tW(i,j;\alpha) = W(j,i;\alpha)$　${}^tK(i,j) = K(j,i)$

教科書P172の例題7-5は考え方にコツが必要。

第9講

・行列式の定義

n次正方行列Aの行列式を$\Delta_n(A)$とし、次のように定める。

(i) n=1の時

$A=[a]$ とすると、$\Delta_1(A)=a$

(ii) $n \geqq 2$の時

$$\Delta_n(A) = (-1)^{n+1} \underbrace{a_{n1}}_{\text{Aのn行1列}} \Delta_{n-1}(\underbrace{A_{n1}}_{\text{Aからn行と1列を除いたもの}}) + (-1)^{n+2} \underbrace{a_{n2}}_{\text{Aのn行2列}} \Delta_{n-1}(\underbrace{A_{n2}}_{\text{Aからn行と2列を除いたもの}}) + \cdots + (-1)^{n+n} \underbrace{a_{nn}}_{\text{Aのn行n列}} \Delta_{n-1}(\underbrace{A_{nn}}_{\text{Aからn行とn列を除いたもの}})$$

・行列式の性質

教科書P191,192,196,197参照。スカラー倍,和,交代性。

・行列式の公式

$$\Delta_n(A) = \sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{n} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n} \Delta_n[e_{i_1}\ e_{i_2} \cdots e_{i_n}]$$

交代性より、i_1〜i_nの中に同じものが存在する時 $\Delta_n[e_{i_1}\ e_{i_2} \cdots e_{i_n}]=0$ となる。従って、i_1〜i_nが全て異なる時のみの和を考えればよい。
また、a_{i_1}〜a_{i_n}に0が含まれない場合のみの和を考えればよい。
教科書P198 例題9-4 (2)の別解を確認するとよい。行列の中に0が多い場合は有用。

・クラメールの公式

n元連立一次方程式 $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = p$ (a_iはn次列ベクトル)
に対して、$\det[a_1 \cdots a_n] \neq 0$の時

$$x_i = \frac{\det[a_1 \cdots p\,(i列目) \cdots a_n]}{\det[a_1 \cdots a_i\,(i列目) \cdots a_n]}$$

例はP.201,202を参照。

第10講

・行列式の性質

(1) 行和　(2) 行倍　(3) 行換　(↔ 教科書 P206 参照)

・正方行列の行列式の計算

正方行列Aが、行和と行換で行階段形Bになったとする。この時、
行換をN回使ったとすれば、

$$\det A = (-1)^N \det B = (-1)^N b_{11} b_{22} \cdots b_{nn}$$

教科書P207 例題10-1 はコツが必要

・行列式の性質

$\det(AB) = (\det A)(\det B)$, $\det {}^tA = \det A$

(正則行列について) $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

対称に区分けされたn次正方行列 $\det \begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix} = \det A \det C$

$\det \begin{bmatrix} A & O \\ B & C \end{bmatrix} = \det A \det C$

第11講

・小行列式と余因子

Aの(i,j)小行列式は、Aからi行とj列を除いたもので$\Gamma_{ij}(A)$と書く。

Aの(i,j)余因子とは、$\tilde{\Gamma}_{ij}(A)$と書き、$\tilde{\Gamma}_{ij}(A) = (-1)^{i+j}\Gamma_{ij}(A)$

・余因子展開

i行に関する余因子展開とは

$$\det A = a_{i1}\tilde{\Gamma}_{i1}(A) + a_{i2}\tilde{\Gamma}_{i2}(A) + \cdots + a_{in}\tilde{\Gamma}_{in}(A)$$

j列に関する余因子展開とは

$$\det A = a_{1j}\tilde{\Gamma}_{1j}(A) + a_{2j}\tilde{\Gamma}_{2j}(A) + \cdots + a_{nj}\tilde{\Gamma}_{nj}(A)$$

・行列式と直線の方程式

2点(a,b), (c,d)が異なる $\Leftrightarrow \mathrm{rank}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$

異なる2点(a,b), (c,d)を通る直線の方程式は $\det\begin{bmatrix} x & a & c \\ y & b & d \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$

・クラメールの公式

Aが正則 即ち $\det A \neq 0$の時

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_{11}(A) & \tilde{\Gamma}_{21}(A) & \cdots & \tilde{\Gamma}_{n1}(A) \\ \tilde{\Gamma}_{12}(A) & \tilde{\Gamma}_{22}(A) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{\Gamma}_{1n}(A) & \cdots & & \tilde{\Gamma}_{nn}(A) \end{bmatrix}$$

添字注意

(あまりにもサイズが大きい行列に対しては不向き)

・小行列式とは

行と列からp個ずつ選び、その選んだ行と列が交差する場所にある成分全てを取り出して並べた行列の行列式を、p次小行列式という。

(ex) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ とすると、例えば $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ がAの2次小行列式のうちの1つ。

・小行列式と階数の関係

$\mathrm{rank}\, A \geqq p \Leftrightarrow$ 0でないAのp次小行列式が存在

・$A\tilde{A} = (\det A)E$

・$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ とする。$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$が一次独立なら、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$を通る平面の方程式は、

$$\det\begin{bmatrix} x & a_1 & b_1 & c_1 \\ y & a_2 & b_2 & c_2 \\ z & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

第12講
後半の授業のまとめなので参照するとよい

第13講
・固有値, 固有ベクトル
$Ap=\lambda p$ ($p\neq 0$) の時, λを固有値, pを固有ベクトルという。

$$Ap=\lambda p \Leftrightarrow (A-\lambda E)p=0 \quad \therefore \det(A-\lambda E)=0$$
(∵ $(A-\lambda E)^{-1}$が存在すれば 左からかけて $p=0$)
$$\therefore (-1)^n \det(\lambda E-A)=0$$
$$\therefore \det(\lambda E-A)=0$$

この $\det(\lambda E-A)$ を「$\Phi_A(\lambda)$」と表し, 固有多項式という.

・対角化
n次正則行列Aの逆行列は以下のように求める。
(i) Aの互いに一次独立な固有ベクトルをn本求める。
(ii) そのn本の固有ベクトルを並べてPとおく。それぞれに対応する固有値を, 左から順に $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とおく。
(iii)
$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & O\\ & \lambda_2 & \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{bmatrix}$$
となる. これを左(or右)から何度もかけて

$$\underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{n個}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{bmatrix}^n$$

$$\therefore P^{-1}A^nP=\begin{bmatrix}\lambda_1^n & & O\\ & \lambda_2^n & \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n^n\end{bmatrix} \qquad \therefore A^n=P\begin{bmatrix}\lambda_1^n & & O\\ & \lambda_2^n & \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n^n\end{bmatrix}P^{-1}$$

(互いに一次独立な)
2次正方行列で, 固有値, 固有ベクトルが1組しかない場合も, A^nは求まる. 以下のようにする。
(i) $Ap=\lambda p$, $Aq=\lambda q+p$ を満たす一次独立な p, q を求める

(ii) $A[\mathbf{p}\ \mathbf{q}] = [\lambda\mathbf{p}\ \ \lambda\mathbf{q}+\mathbf{p}] = [\mathbf{p}\ \mathbf{q}]\begin{bmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ となるから

$$A = [\mathbf{p}\ \mathbf{q}]\begin{bmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{bmatrix}[\mathbf{p}\ \mathbf{q}]^{-1}$$

$$\therefore A^n = [\mathbf{p}\ \mathbf{q}]\begin{bmatrix}\lambda & 1 \\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^n[\mathbf{p}\ \mathbf{q}]^{-1} = [\mathbf{p}\ \mathbf{q}]\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n\end{bmatrix}[\mathbf{p}\ \mathbf{q}]^{-1}$$

※ジョルダン標準形は範囲外

編集後記

内容のクオリティの低さ、字の汚さ、改めてお詫び申し上げます。その代わりといっては難ですが、表紙のクオリティを上げてみました。~~世間では、こういうのを才能の無駄遣いと言います。~~
夏休みもあっという間に過ぎてしまいました。筆者、期末勉強が間に合うかあやしいところです。「まだ時間があるだろ」とすべきことを後回しにしていたらこのざまです。
・・・。無駄なことを書いてしまいました。みなさん、期末試験頑張ってください。ではでは。
余白は画像で埋めます。