・定常運動の安定性

慣性主軸の第3軸が回転軸となっているような定常運動 $\vec{\omega}:(0,0,\alpha)$ の安定性を調べる。

$\omega_1, \omega_2, \varepsilon$ を微小量とし、それらの二次を無視すると、①, ②, ③より、

$$\begin{cases} A\dfrac{d\omega_1}{dt} = (B-C)\,\omega_2\alpha \\ B\dfrac{d\omega_2}{dt} = (C-A)\,\alpha\,\omega_1 \\ C\dfrac{d\varepsilon}{dt} = 0 \Rightarrow \varepsilon = 一定 \end{cases}$$

$$A\frac{d^2\omega_1}{dt^2} = (B-C)\,\alpha\cdot\frac{d\omega_2}{dt} = \alpha^2\frac{(B-C)(C-A)}{B}\,\omega_1$$

よって、$\dfrac{(B-C)(C-A)}{AB}\alpha^2 = \lambda^2 > 0$ のとき、

$$\omega_1 = C_1e^{\lambda t} + C_2e^{-\lambda t} \Rightarrow 不安定$$

反対に、$\dfrac{(B-C)(C-A)}{AB}\alpha^2 = -n^2 < 0$ のとき、

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= C_1\cos nt + C_2\sin nt \\ \omega_2 &= \frac{An}{(B-C)\alpha}(-C_1\sin nt + C_2\cos nt) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (中立)安定$$

まとめると、

$B>C>A$ または $B<C<A$ ならば 不安定

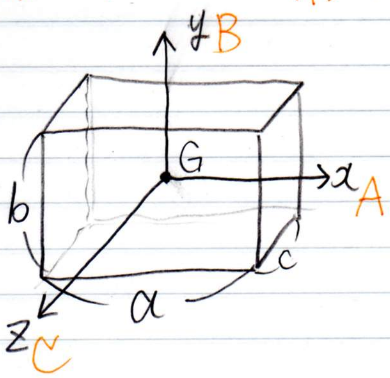
$B>C$, $A>C$ または $B<C$, $A<C$ ならば 安定

言い換えれば、

主慣性モーメントが最大または最小の軸のまわりの回転は安定、中間の軸のまわりの回軸は不安定。

(テニスラケットの定理)

例）本のような形の直方体



ρ：密度，M：質量，$abc\varphi = M$

$$A = \rho \int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} dx \, (y^2 + z^2)$$

$$= \rho \left\{ ac \frac{2}{3} \left(\frac{b}{2}\right)^3 + ab \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{c}{2}\right)^3 \right\}$$

$$= \frac{M}{12} (b^2 + c^2)$$

同様に、$B = \frac{M}{12}(c^2 + a^2)$， $C = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$

$a > b \gg c$ より、$C > B > A$

したがって、y軸まわりの回転のみ不安定となる。