数学 I 試験問題　（時弘）　於 1313　2.14.'11　（10:55～12:25）

**ノート,参考書類持込不可．　問題用紙１枚,解答用紙２枚（冊子１セット），　計算用紙２枚**

[問題-1]　次の積分の値を求めよ。（答えのみを書いてよい。）

(1) $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx$（$a$ 正の定数）　(2) $\int_0^1 dx\int_x^1 dy e^{-y^2}$

[問題-2]　函数 $f(x)$ が領域 $A$ において連続であるとは、

$$\forall x \in A,\quad \forall \varepsilon > 0,\quad \exists \delta_\varepsilon(x) > 0,\quad s.t.\quad \forall y \in A,\quad |x-y| < \delta_{\varepsilon(x)} \quad \to \quad |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

となることであった。以下の問に答えよ。

(1) 実軸 $R$（区間 $(-\infty, \infty)$）において、$f(x)=x^2$ は連続であることを証明せよ。

(2) 区間 $(0, 1]$ において、$f(x)=\dfrac{1}{x}$ は連続であるか否かを答えよ。（証明は不要。）

(3) 「函数 $f(x)$ が領域 $A$ において一様連続である」ことの定義を、問題文にならって書き記せ。

[問題-3]　以下の各問に答えよ。

(1) $\int_0^\infty \sin x\, e^{-ax}dx (a>0)$ の値を求めよ。

(2) 次の積分の値を求めよ。（積分の交換性は証明せずに用いてよい。）

（ｉ） $\int_0^\infty x\sin x\, e^{-ax}dx (a>0)$　（ⅱ） $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}dx$

[問題-4]　$x = r\cos\theta\sin\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta \quad (0 \le r, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi)$ とする。以下の問に答えよ。

(1) ヤコビアン $J(r,\theta,\phi) := \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$ を求めよ。（答のみを書いてよい。）

(2) $D := \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le y \le z\}$, $f(x,y,z) = \dfrac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{x^2+y^2+z^2}$ とするとき、$\int_D f$ の値を求めよ。

[問題-5]　閉区間 $[0,1]$ において函数列 $f_n(x)\ (n=1,2,3,\cdots)$ が次の様に与えられている。

$$
f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & (0 \le x \le 1/n) \\ 2n - n^2 x & (1/n < x \le 2/n) \\ 0 & (2/n < x \le 1) \end{cases}
$$

(1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ であることを示せ。

(2) 「函数列$\{f_n(x)\}$が領域$A$において$x$につき一様に$f(x)$に収束する」ことの定義を述べよ。

(3) $\{f_n(x)\}$は閉区間$[0,1]$において$x$につき一様収束していないことを示せ。