第5回 力学A ① (下村 裕 先生)

(火2)
Date H22・5・18 No. ①

9. 保存力 (つづき)

$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

$$\int_{P_0}^{P} \vec{F}\cdot d\vec{r} = U(P_0) - U(P)$$

$T+U=$ 一定

$$\vec{F} : (X, Y, Z) \quad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -dU \quad \cdots\cdots ③$$

偏微分　$f(x, y, z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$③ \Leftrightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U \ (= -\mathrm{grad}\, U) \qquad \vec{\nabla} : \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

ナブラ

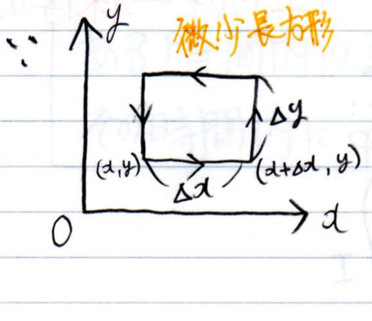
$$X = -\frac{\partial U}{\partial x},\ Y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ Z = -\frac{\partial U}{dz}$$

このように表せる力 $\vec{F}$ を保存力という。

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} \ (= \mathrm{rot}\vec{F}) = 0$$

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0\right)$$

∵



$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = X(x, y, z)\Delta x + Y(x+\Delta x, y, z)\Delta y - X(x, y+\Delta y, z)\Delta x - Y(x, y, z)\Delta y$$

$$\therefore \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y$$

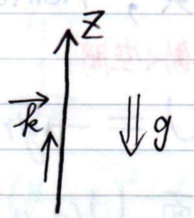
等より、 $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ なら、 $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$

また、

左図より、
$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ なら、 $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$
(任意の閉曲線)

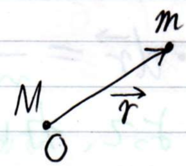
例(i) 一様な重力 $U = mgz + C$

$$\vec{F} = -mg\vec{k}$$



(ii) 原点に中心があるときの万有引力

$$\vec{F} = -\frac{kmM}{r^2}\vec{r}$$



$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ に対して、

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

より、

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

よって、 $U = -\dfrac{kmM}{r} + C$ $\left(\begin{array}{l} r\to\infty \text{ で } U\to 0 \text{ とすれば} \\ C=0 \text{ となる.}\end{array}\right)$