# 2006年度解答

＊ $e = 2.718281828...$として計算しました。
＊ 間違いがあればすぐに基礎統計(水１)のシケ対までお願いします。

問１
(1) 出生男児の体重をXとおくと、

$X \sim N(3.2, 0.4^2)$なので、

$\frac{X-3.2}{0.4} \sim N(0,1)$となる。(P154の定理4.22参照)

$$\therefore P(2.7 \le X \le 3.7) = P(\frac{2.7-3.2}{0.4} \le \frac{X-3.2}{0.4} \le \frac{3.7-3.2}{0.4})$$
$$= P(-1.25 \le \frac{X-3.2}{0.4} \le 1.25)$$
$$= \phi(1.25) - \phi(-1.25)$$
$$= \phi(1.25) - \{1-\phi(1.25)\}$$
$$= 2\phi(1.25) - 1$$
$$= 2 \times 0.8944 - 1$$
$$= 0.7888$$

$\therefore$求める確率は0.79

(2)16人の体重の平均を$\overline{X}$としたとき、

$P(\overline{X} \le 3.35)$を求めればよく、(1)と同様にして、

$\overline{X} \sim N(3.2, \frac{0.4^2}{16})$であるから$\frac{X-3.2}{0.1} \sim N(0.1)$なので、

$$P(\overline{X} \le 3.35) = P(\frac{X-3.2}{0.1} \le \frac{3.35-3.2}{0.1})$$
$$= P(\frac{\overline{X}-3.2}{0.1} \le 1.5)$$
$$= \phi(1.5)$$
$$= 0.9332$$

$\therefore$求める確率は0.93

(3)この都市の住民で感染者である事象をA
検査により感染者と判断される事象をBとおくと、条件より

$P(A)=5\times10^{-4}$

$P(B\,|\,A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=0.998$

$P(B\,|\,A^C)=\dfrac{P(B\cap A^C)}{P(A^C)}=0.3\times10^{-2}$

$\therefore$求める確率は

$$
\begin{aligned}
P(A\,|\,B)&=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\\
&=\frac{P(A\cap B)}{P(B\cap A)+P(B\cap A^C)}\\
&=\frac{\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}\times P(A)}{\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}\times P(A)+\dfrac{P(B\cap A^C)}{P(A^C)}\times P(A^C)}\\
&=\frac{0.998\times5\times10^{-4}}{0.998\times5\times10^{-4}+0.3\times10^{-2}\times(1-5\times10^{-4})}\\
&=\frac{4.99\times10^{-4}}{4.99\times10^{-4}+2.9985\times10^{-3}}\\
&=0.142673...
\end{aligned}
$$

$(*P(A\cap B)=P(B\cap A))$

$\therefore$求める確率は 0.14

(ベイズの定理なるものが使えるのでお好みでどうぞ。)

(4)もっと精度をあげなければならない。

問２

ある顧客が 20 代の女性であるときX=1、そうでないときをX=0 とする。

$X_1,X_2,\cdots,X_{600}$はベルヌーイ母集団$Ber(p)$からの大きさ 600 の無作為標本と考えられる。

600 は十分大きいとして、中心極限定理より

$\overline{X}\sim N(p,\dfrac{p(1-p)}{600})$であるから$\dfrac{\overline{X}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{600}}}\sim N(0,1)$となる。

ここで、$H_0:p=0.7,H_1:p\neq0.7$なる検定問題を考える。

$Z=\dfrac{\overline{X}-0.7}{\sqrt{\dfrac{0.7(1-0.7)}{600}}}$とおくと、

$H_0$が正しいとき$Z\sim N(0,1)$で、有意水準を 0.05 とすると

$|Z|>Z_{0.025}=1.96\Rightarrow H_0$を棄却

$|Z|\le Z_{0.025}=1.96\Rightarrow H_0$を棄却しない

となり、実際

$Z=\dfrac{\dfrac{360}{600}-0.7}{\sqrt{\dfrac{0.7(1-0.7)}{600}}}=-5.345...$となり、$H_0$は棄却されるので、

顧客中の 20 代女性の割合は変化したと考えられる。

問３

１ml 中のバクテリアの数をとおくと

条件より$X\sim P_o(3)$

(1) $P(X\ge 4)=1-\{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\}$

$$=1-e^{-3}(\frac{3^0}{0!}+\frac{3^1}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!})$$

$$=1-0.6472$$

$$=0.3527...$$

$\therefore$求める確率は 0.35

(2) $P(X=0)=e^{-3}\times\dfrac{3^0}{0!}=0.04978...$

二回の試行は独立であるから、求める確率は

$0.04978\times 0.04978=0.002478$

$\therefore 0.0025$

(3)1,2,3 回の採取でバクテリアが含まれていない事象を$A_1,A_2,A_3$とすると、

それらはすべて独立であり、

その確率は$e^{-3}\times\dfrac{3^0}{0!}=0.04978...$

求めるのは

$$P((A_1 \cap A_2^C \cap A_3^C) \cup (A_1^C \cap A_2 \cap A_3^C) \cup (A_1^C \cap A_2^C \cap A_3))$$
$$= P(A_1)P(A_2^C)P(A_3^C) + P(A_1^C)P(A_2)P(A_3^C) + P(A_1^C)P(A_2^C)P(A_3)$$
$$= 3 \times 0.04978 \times (1-0.04978)^2$$
$$= 0.1348\ldots$$

∴求める確率は 0.13

おさらい

ポアソン分布について

$X \sim P_o(\lambda)$のとき$P(X=x) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$が成り立つ。

問 4

条件より

$X_1, \cdots, X_{14} : N(\mu_1, \sigma_1^2)$からの無作為標本分布で

$\overline{X} = 44.2, s^2 = 4.2$

$Y_1, \cdots, Y_{10} : N(\mu_2, \sigma_2^2)$からの無作為標本分布で

$\overline{Y} = 49.6, s^2 = 6.4$

(1) $\overline{X} \sim N(\mu_1, \dfrac{\sigma^2}{14})$なので、$\dfrac{\overline{X}-\mu_1}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{14}}} \sim N(0,1)$

また、$\dfrac{(14-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(14-1)$であるから

$$\therefore \frac{\dfrac{\overline{X}-\mu_1}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{14}}}}{\sqrt{\dfrac{(14-1)s^2}{\sigma^2} \times \dfrac{1}{14-1}}}$$
$$= \frac{\overline{X}-\mu_1}{\sqrt{\dfrac{s^2}{14}}} \sim t(14-1)$$

(＊P207 の定理 6.3 と P210 の定義 6.3 参照)

これより、

$$P(-t_{0.025}(13) \le \frac{44.2-\mu_1}{\sqrt{\frac{4.2}{14}}} \le t_{0.025}(13)) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow P(44.2-\sqrt{3}t_{0.025}(13) \le \mu_1 \le 44.2+\sqrt{3}t_{0.025}(13)) = 0.95$$

(＊P228 の定理 7.1 参照)

$\therefore \mu_1$ に関する信頼係数 0.95 の信頼区間は

[43.0,45.4]

(2) $P(\chi^2_{1-0.025}(13) \le \frac{13s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{0.025}(13)) = 0.95$

$$P(\frac{13\times 4.2}{\chi^2_{0.025}(13)} \le \sigma^2 \le \frac{13\times 4.2}{\chi^2_{0.0975}(13)}) = 0.95$$

(＊P231 の定理 7.2)

$\therefore \sigma^2$ に関する信頼係数 0.95 の信頼区間は

[2.2,10.9]

(3)範囲外につき、省略。

(てかシケ対の間で答えが合わねーんだよチクショウ。)

問５

(1)X の周辺分布は

$$P(X=0) = \frac{3}{20}+\frac{1}{10}+\frac{3}{20} = \frac{2}{5}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{10}+0+\frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{20}+\frac{1}{10}+\frac{3}{20} = \frac{2}{5}$$

Y の周辺分布は

$$P(Y=1) = \frac{3}{20}+\frac{1}{10}+\frac{3}{20} = \frac{2}{5}$$

$$P(Y=2) = \frac{1}{10}+0+\frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

$$P(Y=3) = \frac{3}{20}+\frac{1}{10}+\frac{3}{20} = \frac{2}{5}$$

(2) $E(X) = 0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{2}{5} = 1$

ここで、$E(X^2)=0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{2}{5}=\frac{9}{5}$ であるから

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{9}{5}-1^2=\frac{4}{5}$

(3) $E(Y)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{5}=2$

$E(XY)=0\times1\times\frac{3}{20}+0\times2\times\frac{1}{10}+0\times3\times\frac{3}{20}+1\times1\times\frac{1}{10}+$

$1\times2\times0+1\times3\times\frac{1}{10}+2\times1\times\frac{3}{20}+2\times2\times\frac{1}{10}+2\times3\times\frac{3}{20}=2$

と合わせて、

$C(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=2-1\times2=0$

(4) $P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2)$ などが成立しないので、

独立ではない。