2010年5月13日

数学II演習 ① (3)　　(梶原)

以下の問題から5題選んで答えよ．ただし，表から2題以上，裏から2題以上選ぶこと．

19. (1) 次の行列 A, B の転置行列を求めよ． $A = [x\ y\ z]$, $B = \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

(a, b, c, x, y, z は実数とする)

(2) (1) の行列 A, B に対して，${}^tAA, A\,{}^tA, {}^tBB, B\,{}^tB, AB, {}^tB\,{}^tA$ を求めよ．(答えだけでもよいが,「写して」解答してはいけない．)

20. 2つの n 次下三角行列の積は下三角行列であることを示せ．

21. (1) 次の A, B に対して，AB, BA を計算せよ．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ (a, b \text{ は数})$$

(2) 2次上三角行列で対角成分がすべて1である行列 A, B はどれでも $AB = BA$ が成り立つことを確認せよ．

22. 2つの n 次対角行列 A, B の積 AB は対角行列であることを示し，さらに $AB = BA$ を示せ．(難しい場合は，4×4 行列の場合に示した解答も認める．)

23. A, B はそれぞれ m 次正則行列，n 次正則行列とする．任意の $m \times n$ 行列 C に対して，区分けされた行列の積

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$$

を計算せよ．ここで O は $n \times m$ 次零行列を表す．

24. 対角行列 $D := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ (ただし，a, b は相異なる複素数とする) と可換な3次複素正方行列 X，つまり $DX = XD$ をみたす行列をすべて求めよ．

次回の数学II①は5月27日(木).

25. 次の行列の既約行階段形を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 5 & 15 & 0 & 4 \\ 3 & 9 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 3 & 1 & 12 \end{bmatrix}$

26. 次の行列の階数を求めよ. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

27. 基本変形の [行和] のうち, i 行のスカラー倍を j 行に足す [行和] (**ただし** $i<j$ **とする**) と [行倍] だけを用いて, 次の行列を行階段行列にせよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -6 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

28. $\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ の階数を求めよ.

29. (1) i 行のスカラー倍を j 行に足す [行和] (**ただし** $i<j$ **とする**) と [行倍] により, 下三角行列は下三角行列に変形されることを示せ.

(2) i 行のスカラー倍を j 行に足す [行和] (**ただし** $i>j$ **とする**) と [行倍] により, 上三角行列は上三角行列に変形されることを示せ.

30. 次の行列の階数が 3 になるとき, a, b を求めよ. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -5 & -1 & -11 \\ -2 & 2 & -3 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & a & b \end{bmatrix}$