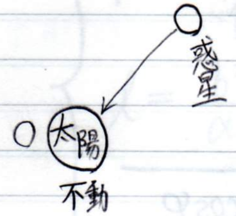
# 第8回　力学A①

Date H22・6・8　No. ①

## 例(i) 惑星運動



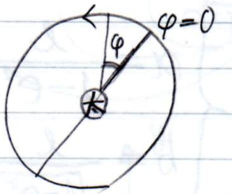

$$f = -\frac{kM}{r^2} = -\frac{\mu}{r^2} \quad (\mu = kM)$$

$$= -\mu u^2 \quad \left(u = \frac{1}{r}\right)$$

前節⑤より、 $\dfrac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \dfrac{\mu}{h^2}$ ……… ⑪

$$u = \frac{1}{r} = A\cos\varphi + B\sin\varphi + \frac{\mu}{h^2}$$

$\varphi = 0$ で $r$ が極小値をとる（$\varphi = 0$ を近日点とする）と、




$\dfrac{du}{d\varphi} = 0$, $\dfrac{d^2u}{d\varphi^2} < 0$ at $\varphi = 0$ より、

$B = 0$, $A > 0$

$$\therefore r = \frac{1}{\frac{\mu}{h^2} + A\cos\varphi} = \frac{l}{1 + e\cos\varphi} \quad \cdots\cdots ⑫$$

$l = \dfrac{h^2}{\mu}$, $e = \dfrac{h^2 A}{\mu}$

半直線　離心率

$$e \begin{cases} = 0 & \text{円} \\ = 1 & \text{放物線} \\ < 1 & \text{楕円} \\ > 1 & \text{双曲線} \end{cases}$$

⑫は、円錐曲線の方程式

惑星は太陽の周囲から離れないので、

$e < 1$ なる楕円軌道を描く

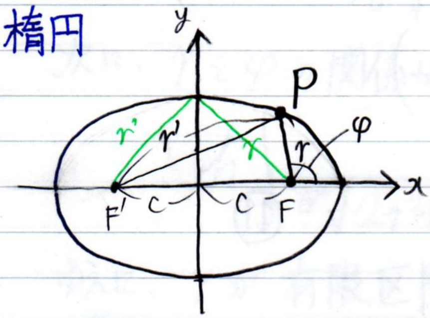
すなわち、

$\boxed{\text{惑星の軌道は、太陽を1つの焦点とする楕円である。}}$

Keplerの第1法則

注)「2定点からの距離の和が一定の曲線は楕円であり、
差が一定の曲線は双曲線である.」

・楕円




$$r + r' = 2a$$

$$r' = \sqrt{r^2 + (2c)^2 + 4cr\cos\varphi}$$

を、$r' = 2a - r$ に代入して両辺二乗.

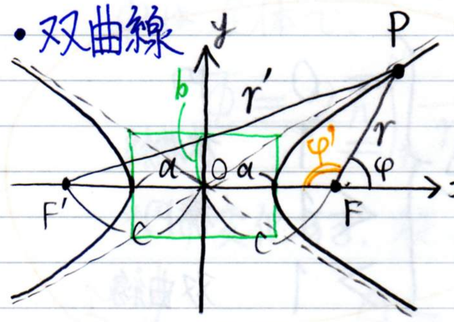
$$r^2 + (2c)^2 + 4cr\cos\varphi = (2a - r)^2$$

$$4(c\cos\varphi + a)r = 4(a^2 - c^2)$$

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a + c\cos\varphi}$$

$$\begin{cases} r = \dfrac{l}{1 + e\cos\varphi} \\ l = \dfrac{b^2}{a}, \quad e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{l}{1 - e^2} \\ b = \dfrac{l}{\sqrt{1 - e^2}} \end{cases}$$

・双曲線




$$r' = \sqrt{r^2 + (2c)^2 + 4cr\cos\varphi}$$

$$r' = 2a + r$$

$$r^2 + (2c)^2 + 4cr\cos\varphi = (2a + r)^2$$

$$\therefore 4(a - c\cos\varphi)r = 4(c^2 - a^2)$$

$$\therefore r = \frac{c^2 - a^2}{a - c\cos\varphi} = \frac{b^2}{a - c\cos\varphi} \quad \cdots\cdots (*)$$

$\Big($ $\because$ (*)より、$r \to \infty$ のとき、$\cos\varphi = \dfrac{a}{c}$

$$\therefore \tan\varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore c^2 - a^2 = b^2 \Big)$$