命題論理では、真理値を紹介
2値原理にもとづいて、
P、Qのとりうる値TorFに応じて、
φ全体が、TorFかを決定した。

プリントNo．8（10/07/02）

○ 古典述語論理の意味論

という考え方を用いは Fa では、Fについても、aについても、考えてやらねば！

・モデル M とは、組 (D, v) のことである。D は定項が指し示しうる個体全体の集合（考察中の世界のすべてのものの集合）であり個体領域（または論議領域）と呼ぶ。v は、定項にどの個体を割り当て、述語記号にどのような個体の集合を割り当てるかを定める関数であり、付値関数と呼ぶ。（0項述語記号は、v によって、T、Fのどちらかが割り当てられる。）

・任意の論理式 ϕ について、M においてその真理値がTである（$v_M(\phi)=$T）ということが次のように帰納的に定義される。

（1）$v_M(Aa_1a_2..a_n)=\mathrm{T} \Leftrightarrow (v_M(a_1), v_M(a_2), .., v_M(a_n)) \in D^n$ が、$v_M(A)$ の要素である。ただし、A が0項述語記号のとき、$v_M(A)=$TまたはF。

真理値意味論

（2）$v_M(\chi \wedge \omega)=\mathrm{T} \Leftrightarrow v_M(\chi)=$Tかつ$v_M(\omega)=$T
（3）$v_M(\chi \vee \omega)=\mathrm{T} \Leftrightarrow v_M(\chi)=$Tまたは$v_M(\omega)=$T
（4）$v_M(\chi \rightarrow \omega)=\mathrm{T} \Leftrightarrow v_M(\chi)=$Fまたは$v_M(\omega)=$T
（5）$v_M(\neg\chi)=\mathrm{T} \Leftrightarrow v_M(\chi)=$F
（6）$v_M(\forall\zeta\, F(\zeta))=\mathrm{T} \Leftrightarrow M$ のすべての α 変種 M/α について、$v_{M/\alpha}(F(\alpha))=$T（ただし、α は $F(\zeta)$ に現れていない定項に限る。）
（7）$v_M(\exists\zeta\, F(\zeta))=\mathrm{T} \Leftrightarrow M$ のある α 変種 M/α について、$v_{M/\alpha}(F(\alpha))=$T（ただし、α は $F(\zeta)$ に現れていない定項に限る。）

＊ M の α 変種とは、M における付値関数 v を、α に割り当てる個体のみが v と異なり、あとはまったく v と同じ付値関数 $v_{M/\alpha}$ で置き換えたものである。（もともとの v も $v_{M/\alpha}$ の一つと考える。）

・ϕ が M で充足可能であるとは、あるモデル M が存在して、$v_M(\phi)=$Tとなることである。

・ϕ が妥当であるとは、すべてのモデル M に対して、$v_M(\phi)=$Tとなることである。

○ 述語論理の性質

・述語論理の無矛盾性：各述語論理体系は、無矛盾である。

最小、直観主義、古典

・述語論理の健全性：各述語論理体系は、健全である。
すなわち、任意の論理式 ϕ について、$\vdash\phi \Rightarrow \phi$ は妥当

証明可能

・古典述語論理の完全性：古典述語論理体系は、完全である。
すなわち、任意の論理式 ϕ について、ϕ は妥当 $\Rightarrow\ \vdash\phi$

証明可能

○意味論的タブロー（分析タブロー、真理の木）

・論理式ϕの否定が充足不可能であれば、ϕは妥当である。

また、充足可能であれば、ϕは妥当ではない。（反証モデルが存在する。）

・論理式を以下のような規則にしたがって変形していくことによって、
充足不可能かどうかを調べることができる。（意味論的タブローの方法）

＜意味論的タブローの規則＞

・「↓」は、上の論理式を含むすべての経路の先に、下の論理式（ないし「閉」）を書くことを表す。

・「／　＼」は、上の論理式を含むすべての経路を分岐させたのち、その先にそれぞれ下の論理式を書くことを表わす。

・「！」は一度適用したら、同じ論理式には二度と適用しないことを示す。

・すべての経路上に「閉」が現れたら、最初の論理式が充足不可能である。「閉」が現れえない経路がある場合は、最初の論理式は充足可能であり、その経路上の論理式から、反証モデルが構成できる。

$$\begin{array}{c} !\,\chi\land\omega \\ \downarrow \\ \chi \\ \omega \end{array} \qquad \begin{array}{c} !\,\neg(\chi\land\omega) = \neg\chi\lor\neg\omega \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg\chi \qquad \neg\omega \end{array} \qquad \begin{array}{c} !\,\chi\lor\omega \\ \diagup \quad \diagdown \\ \chi \qquad \omega \end{array} \qquad \begin{array}{c} !\,\neg(\chi\lor\omega) = \neg\chi\land\neg\omega \\ \downarrow \\ \neg\chi \\ \neg\omega \end{array}$$

$$\begin{array}{c} !\,\chi\to\omega \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg\chi \qquad \omega \end{array} \qquad \begin{array}{c} !\,\neg(\chi\to\omega) \\ \downarrow \\ \chi \\ \neg\omega \end{array} \qquad \begin{array}{c} !\,\neg\neg\chi \\ \downarrow \\ \chi \end{array} \qquad \begin{array}{|c} \chi \\ \neg\chi \\ \downarrow \\ \text{閉} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \forall\zeta F(\zeta) \\ \downarrow \\ F(\alpha) \end{array} \qquad \begin{array}{c} !\,\neg\forall\zeta F(\zeta) \\ \downarrow \\ \exists\zeta\neg F(\zeta) \end{array} \qquad \begin{array}{c} !\,\exists\zeta F(\zeta) \\ \downarrow \\ F(\alpha) \end{array} \qquad \begin{array}{c} !\,\neg\exists\zeta F(\zeta) \\ \downarrow \\ \forall\zeta\neg F(\zeta) \end{array}$$

αは経路上既出の定項が
あれば、その定項。
なければ、任意の定項。

αは経路上未出の定項

・意味論的タブローの方法は、単項古典述語論理（述語記号を０項及び単項述語記号のみに制限した体系）における論理式の妥当性については、決定手続きとなる。ただし、一般の古典述語論理については、この方法では、妥当かどうか決定不可能な論理式が存在する。（例：$\forall x\exists y Pxy \to Paa$）

・古典述語論理体系は決定可能ではない。すなわち、どのような方法によっても、妥当かどうかを決定することができない場合がある。