数学 I 演習問題 (6.21) 解答

[問題-1] 次の函数の微分を求めよ.

(1) $\sin(\log x)$ (2) $\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$ (3) $\cot^{-1}x$ $(0<\cot^{-1}x<\pi)$

(解) (1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(\log x)=\dfrac{\cos(\log x)}{x}$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$.

(3) $y=\cot^{-1}x$ としておくと $x=\cot y$. 両辺を x で微分して $1=-\dfrac{1}{\sin^2 y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. したがって, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\sin^2 y$. $\dfrac{1}{\cot^2 y+1}=\sin^2 y$ なので, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot^{-1}x=-\dfrac{1}{x^2+1}$.

[問題-2] 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ が収束することを, この級数の n 項までの部分和を S_n とするとき, $\{S_n\}$ が Cauchy 列になることを示すことによって証明せよ.

(解) $m\ge n$ とすると,

$$|S_m-S_n|=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$$

よって, 任意の $\epsilon>0$ に対して $N_\epsilon:=1+\left[\dfrac{1}{\epsilon}\right]$ とおくと, $n,m\ge N_\epsilon$ ならば

$$|S_m-S_n|<\frac{1}{N_\epsilon}<\epsilon$$

となるので, $\{S_n\}$ はコーシー列である. したがって, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ は収束する.

[問題-3] 次の極限値が存在すればその値を求めよ. ただし a, b は正の実数とする.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+0}n\log n$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{1/n}$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to+0}\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^{1/n}$

(解) (1) $\displaystyle\lim_{n\to+0}n\log n=\lim_{k\to\infty}-ke^{-k}=\lim_{k\to\infty}-\frac{k}{e^k}=\lim_{k\to\infty}-\frac{k}{1+k+\frac{k^2}{2}+O(k^3)}=0.$

(2) $a\ge b$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}a\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)^{1/n}$$

$1\le 1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^n\le 2$ であり, $1^0=2^0=1$ である. したがって, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{1/n}=a$.
$a<b$ でも同様であるので結局, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{1/n}=\max[a,b]$.