No.

DATE

$$[Pa]\quad[Pb]\quad[Pc]$$
$$\dfrac{Pa \vee Pb \vee Pc \qquad \omega \qquad \omega \qquad \omega}{\omega}$$

ωをαで代表させたものとも取れる。

有限の範囲では ∨ともとれる。

・存在量化

$$\dfrac{F(\alpha)}{\exists\xi F(\xi)}\ (\exists I)$$

$$\dfrac{\exists\xi F(\xi) \qquad \begin{matrix}[F(\alpha)]\\ \vdots \\ \omega\end{matrix}}{\omega}\ (\exists E)$$

条件が厳しい。

条件
1. F(ξ)
αは 2. ω
3. 前提
4. キャンセルされていない仮定　に含まれない定項
(⇒ F(α)には含まれていてよい).

3の違反例 $\exists x Px,\ Qa \vdash \exists x(Px \wedge Qx)$

あるxが人間であって、ポチは犬である
→ 人間であり犬であるあるxが存在する?!

$$\dfrac{\exists x Px \qquad \dfrac{[Pa] \qquad Qa}{Pa \wedge Qa}\ \ \exists x(Px \wedge Qx)}{\exists x(Px \wedge Qx)}\ (\exists E)$$

← aが前提に含まれている。

今、一般性が必要なところに固有名aをおいてしまった。

新しい定項を入れる必要がある。

4の違反例

$$\dfrac{\dfrac{\exists x Px \qquad \dfrac{\dfrac{[Pa]^{①}\ [Qa]^{②}}{Pa \wedge Qa}}{\exists x(Px \wedge Qx)}}{\exists x(Px \wedge Qx)}\ ①}{Qa \to \exists x(Px \wedge Qx)}\ ②$$

① ← この段階ではQaはまだキャンセルされていなかった。

1の違反例 $\forall x \exists y Pxy \vdash \exists x Pxx$

Pxy : xはyを愛する

すべてのxがあるyを愛している。
→ 自身を愛するあるxが存在する?!

$$\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Pxy}{\exists y Pay} \qquad \dfrac{[Paa]}{\exists x Pxx}}{\exists x Pxx}$$

同じaをおいてしまった

2の違反例 $\exists x Pxx \vdash \exists x Pax$

自己を愛するあるxが存在する
→ あるxをaさんは愛している?!

$$\dfrac{\exists x Pxx \qquad \dfrac{Paa}{\exists x Pax}}{\exists x Pax}$$

ωにaが入っている。

No.

DATE

例 6-1　$\forall x Px \vdash \exists x Px$

6-2　$\exists x(Px \land Qx) \vdash \exists x Px \land \exists x Qx$　← 逆はムリ。

6-3　$\forall x(Px \to Qx) \vdash \exists x Px \to \exists x Qx$

6-4　$\exists x(Px \land Q) \vdash \exists x Px \to Q$

6-5　$\exists x \forall y\ Pxy \vdash \forall y \exists x\ Pxy$　P52

すべてのyを愛するあるxが存在するならば、すべてのyは自分を愛してくれるxが存在する。

6-6　$\neg \exists x Px \vdash \forall x \neg Px$

6-7　$\neg \forall x Px \vdash \exists x \neg Px$　← 古典論理

6-9　$\forall x(Px \to \neg Qx) \vdash \neg \exists x(Px \land Qx)$

すべてのPはQでない
⇒「あるPはQである」ことはない
PとQが同時に存在することはない。

○読み替え定理の拡張，置き換え定理の拡張

$\forall x(Px \to \neg Qx)$
①$\equiv \forall x(\neg Px \lor \neg Qx)$
②$\equiv \forall x \neg(Px \land Qx)$
③$\equiv \neg \exists x(Px \land Qx)$

同値式であるとわかっている式を代入していくことで式を証明する。

よみかえでよく使うのは，
ド・モルガン　$\neg(Pa \land Qa) \leftrightarrow \neg Pa \lor \neg Qa$
対偶　$P \to Q \leftrightarrow \neg Q \to \neg P$
二重否定　$\neg\neg P \leftrightarrow P$

② $\neg A \lor \neg B \equiv \neg(A \land B)$ が証明可能 → 以下①と同様

③ $\forall x \neg Ax \equiv \neg \exists x Ax$ が証明可能
よみかえより
$\forall x \neg(Px \land Qx) \equiv \neg \exists x(Px \land Qx)$

① $\forall x(Px \to \neg Qx) \equiv \neg \exists x(Px \land Qx)$

よみかえ⇒　$\underbrace{Pa \to \neg Qa}_{A} \equiv \underbrace{Pa \land Qa}_{B}$ とおく。　も証明可能

おきかえ

Aを
〃
$Px \to \neg Qx$

Bを
〃
$Px \land Qx$ として置きかえを適用。