No. 8

Date

$$\left|\sum_{k=m}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=m}^{n}\frac{|x|^k}{k!} = \frac{|x|^m}{m!}\left\{1+\frac{|x|}{m+1}+\frac{|x|^2}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{|x|^{n-m}}{(m+1)\cdots n}\right\}$$

$$\leq \frac{|x|^m}{m!}\left\{1+\frac{|x|}{m+1}+\frac{|x|^2}{(m+1)^2}+\cdots+\frac{|x|^{n-m}}{(m+1)^{n-m}}\right\}$$

(無限等比級数との比較) $\longrightarrow \; < \dfrac{|x|^m}{m!}\times\dfrac{1}{1-\frac{|x|}{m+1}}$

xは定数なので

$$\frac{1}{1-\frac{|x|}{m+1}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1$$

◎ ここで $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{|x|^m}{m!}=0$ を示すと $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left|\sum_{k=m}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|=0$ ☆ を示したことになる。

☆は収束の定義から

$$\forall\varepsilon>0,\ {}^{\exists}n_\varepsilon \ \text{s.t.}\ n\geq m\geq n_\varepsilon \longrightarrow \left|\sum_{k=m}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|<\varepsilon$$

ということであり、

☆を示せれば題意は示される。

つまり $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{|x|^m}{m!}=0$ を示せばよい。

$|x|\leq 1$ のとき 明らかに $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{|x|^m}{m!}=0$.

$|x|>1$ のとき

$$x^2<\frac{1}{2}\left[\frac{n_\varepsilon}{2}\right],\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{n_\varepsilon}{2}\right]}<\varepsilon$$ なる n_ε を考えると、

任意の $\varepsilon>0$ に対して $m\geq n_\varepsilon$ であれば

$$\frac{|x|^m}{m!} \underset{①}{\leq} \frac{(|x|^2)^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}}{m(m-1)\cdots\left(m-\left[\frac{m}{2}\right]-1\right)} \underset{②}{\leq} \frac{(|x|^2)^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}}{\underbrace{m(m-1)\cdots\left(m-\left[\frac{m}{2}\right]\right)}_{\left[\frac{m}{2}\right]+1\text{ 個}}} \cdots ⊛$$

$$\underset{③}{<} \left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{m}{2}\right]} \underset{④}{\leq} \left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{n_\varepsilon}{2}\right]} < \varepsilon$$