2011/01/30
文責: リッキー、長谷川

電磁気学 A（前田京剛）過去問 2009 年度第 2 問解答例

※書いてあることに誤りと思われるような点を見つけたら、知らせてください。。。

[2] 図 1 (a) のように、無限に長い導線に電流 I が流れており、導線から距離 R だけ離れたところに点電荷 $q(>0)$ が静止している。このように、点電荷が静止している座標系を K 系(x, y, z, t) と呼ぶことにする(図 1(b))。K 系では導線は z 軸上にあるものとする。また、K においては、導線には正負の電荷がそれぞれ線密度$\pm\lambda$ で存在しており、導線は帯電はしていない。以下の問に答えよ。

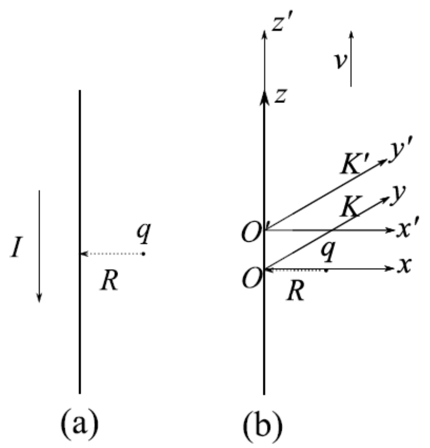

図 1　導線と点電荷

(A) K 系で考える。

1) 点電荷の位置における電場及び磁場の向きと大きさを求めよ。

2) 点電荷が受ける力を求めよ。

[解答例]

(A) K系

1) 電場は 0。（q からは等方的に湧き出すので和は 0 になる）

磁場は、対称性と Ampere の法則より y 軸負の方向に生じ、大きさ B とすると、

$$2\pi R \cdot \mathrm{B} = \mu_0 I \qquad \therefore \mathrm{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}$$

2) 電場が存在せず、静止しているため磁場からの力も働かない。

よって、点電荷は力を受けない。

(B) 導線中の電流は自由電子により運ばれている。自由電子の速度を$+v\ (>0)$ (図で下から上へ向かう向き) として、以下では、同じ問題を導線中の自由電子とともにz 軸の正の方向に速度v で等速度で動く座標系K' 系(x', y', z', t') で考える(図1(b))。ただし、K' 系のz' 軸も導線と重なっているとし、その原点は$t = t' = 0$ において、点電荷から導線におろした垂線が交わる点であったとする。

3) 導線中の負電荷及び正電荷の線密度を求めよ。ただし、この際、速度v で運動する物体は運動方向にローレンツ収縮を受けて、長さが、$\sqrt{1-\beta^2}$倍($\beta \equiv v/c$, cは光の速度) になることを考慮せよ。

4) 導線の周りにはどのような電場ができるか？大きさとともに求めよ。

5) 点電荷が電場から受ける力を求めよ。

6) 電流I を、λ, β, v を用いて表せ。

7) 導線の周りにはどのような磁場ができるか？大きさとともに求めよ。

8) 点電荷にはローレンツ力が働く。その向きと大きさを求めよ。

9) 点電荷に働く力の総和を求めよ。

(B) K' 系

3) 負電荷は、K' 系で見ると静止、K 系で見ると速さvで運動。これより、K' 系で見た長さは K系で見た長さの $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 倍。よって線密度は$\sqrt{1-\beta^2}$ 倍となる。K' 系で見た負電荷の線密度は、$\sqrt{1-\beta^2}\lambda$ となる。

正電荷は、K' 系で見ると速さvで運動し、K系で見ると静止。これより、K' 系で見た長さは K 系で見た長さの$\sqrt{1-\beta^2}$ 倍。よって線密度は$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 倍となる。K' 系で見た正電荷の線密度は、$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\lambda$ となる。

4) K' 系で見ると導線は、

線密度 $\frac{\lambda}{\sqrt{1-\beta^2}}-\sqrt{1-\beta^2}\lambda = \frac{1-(1-\beta^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\lambda$ で一様に帯電。

対称性より、電場は導線から放射状に生じ、その大きさを導線からの距離 r の関数として $\mathrm{E}(r)$とおくと、Gauss の法則より

$$\mathrm{E}(r)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\beta^2\lambda}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{1}{r}$$

5) x' 軸の正方向に

大きさ $\mathrm{F}=q\mathrm{E}(R)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\beta^2\lambda}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{q}{R}$ の力を受ける。

6) z' 軸の負の方向に線密度 $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\lambda$ の正電荷が速さ v で運動しているので、$I=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\beta^2}}v$

7) 対称性と Ampere の法則により y' 軸負の方向に

大きさ $\mathrm{B}'=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1}{R}\frac{\lambda}{\sqrt{1-\beta^2}}v$ の磁場が生じる。

8) 点電荷は、y' 軸負の方向大きさB'の磁場中を z' 軸の負の方向に速さ v で運動しているので、x' 軸負の方向に

大きさ $\mathrm{q}v\mathrm{B}'=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{q}{R}\frac{\lambda}{\sqrt{1-\beta^2}}v^2$ の力を受ける。

9) 点電荷に働く力はx' 軸方向のみであり、x' 軸正方向を正として、その大きさは、

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\beta^2\lambda}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{q}{R} - \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{q}{R}\frac{\lambda}{\sqrt{1-\beta^2}}v^2 \qquad (\because \mathbf{5}), \mathbf{8}))$$

$$= \frac{\lambda q}{2\pi\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{\beta^2}{\varepsilon_0} - \mu_0 v^2\right)$$

ここで、$\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0\mu_0$ を用いると、

$$\frac{\beta^2}{\varepsilon_0} - \mu_0 v^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{v^2}{c^2} - \mu_0 v^2 = v^2\left(\frac{1}{\cancel{\varepsilon_0}}\cdot\mu_0\cancel{\varepsilon_0} - \mu_0\right) = 0$$

よって、点電荷に働く力の総和は 0 となり、K 系で見たときと同じになることが確認された。

[以上]