$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{m} {}_mC_k f^{(k+1)}(x)\cdot g^{(m-k)}(x)}_{k=m\text{ のときを分ける}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{m} {}_mC_k f^{(k)}(x)\cdot g^{(m-k+1)}(x)}_{k=0\text{ のときを分ける}}$$

) 展開しただけ

(⇐ 〜 と ＝ の形を統一するため)

$$= {}_mC_m f^{(m+1)}(x)\, g(x) + \sum_{k=0}^{m-1} {}_mC_k f^{(k+1)}(x)\, g^{(m-k)}(x) + {}_mC_0 f(x)\, g^{(m+1)}(x) + \sum_{k=1}^{m} {}_mC_k f^{(k)}(x)\, g^{(m-k+1)}(x)$$

$$= f^{(m+1)}(x)\, g(x) + f(x)\, g^{(m+1)}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} {}_mC_k f^{(k+1)}(x)\, g^{(m-k)}(x) + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{m-1} {}_mC_{\ell+1} f^{(\ell+1)}(x)\, g^{(m-\ell)}(x)}_{\ell=k-1\text{ とおいた}}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} {}_mC_{k+1} f^{(k+1)}(x)\, g^{(m-k)}(x)$$

そろえた!!

$$= f^{(m+1)}(x)\, g(x) + f(x)\, g^{(m+1)}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \underbrace{({}_mC_k + {}_mC_{k+1})}_{{}_{m+1}C_{k+1}} f^{(k+1)}(x)\, g^{(m-k)}(x)$$

$$= f^{(m+1)}(x)\, g(x) + f(x)\, g^{(m+1)}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} {}_{m+1}C_{k+1} f^{(k+1)}(x)\, g^{(m-k)}(x)$$

$$= \underbrace{f^{(m+1)}(x)\, g(x)}_{\ell=m+1\text{ のとき}} + \underbrace{f(x)\, g^{(m+1)}(x)}_{\ell=0\text{ のとき}} + \sum_{\ell=1}^{m} {}_{m+1}C_\ell f^{(\ell)}(x)\, g^{(m+1-\ell)}(x) \quad (\ell=k+1\text{ とおく})$$

$$= \sum_{\ell=0}^{m+1} {}_{m+1}C_\ell f^{(\ell)}(x)\, g^{(m+1-\ell)}(x)$$

よって $n=m+1$ のときも ☆は成立する。（ℓをkに変えるだけ）

以上 (i), (ii) より すべての $n\in\mathbb{N}$ に関して ☆が成立することが示された。 //

<補足>

$n=1, 2, 3, \cdots$ と実際に調べてみると

$(a+b)^n$ の 2項展開と被って興味深い結果になります。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 \quad 1 & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 3 & & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & & 6 & & 4 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} {}_1C_0 \quad {}_1C_1 \\ {}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2 \\ {}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3 \\ \vdots \end{array}$$

${}_mC_k + {}_mC_{k+1} = {}_{m+1}C_{k+1}$ を使うのが自然にみえる。