数学 I 演習問題　（時弘）　於 531　1.07.'11 (9:00~10:30)

[問題-1]　関数列$f_n(x)(n=1,2,3,\ldots)$を

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x & 0\le x\le 1/n \\ 2n-n^2x & 1/n\le x\le 2/n \\ 0 & 2/n\le x\le 1 \end{cases}$$

によって定義する．このとき$\{f_n(x)\}$は収束するが一様収束ではないことを示せ.

[問題-2]　次の積分の値を求めよ.

(1)　$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx$($a$は正の定数)

(2)　$\int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} dy e^{-y^2}$

(3)　$\mathrm{D}:=\{(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})|\mathrm{x}^2+y^2+z^2\le 1\}$, $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$　とするとき、$\int_D f$ を求めよ.

[問題-3]　$\mathrm{D}:=\{(x,y)|(x-a)^2+y^2\le a^2\}$, $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}):=\sqrt{x^2+y^2}$ とするとき, $\int_D f$ を求めよ.(極座標変換する. θ の範囲に注意.)

[問題-4]　$I:=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$について，以下の問に答えよ.

(1) $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{dx}$ は絶対収束することを示せ.

(2) 積分 Iは絶対収束しないことを示せ.

(3)$\{a_n\}$が単調数列で，$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ であれば，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$ は収束する．これを利用して積分 Iが広義積分可能であることを示せ.