(3) 微分の定義から

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+0}\log\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^{1/n} &= \lim_{n\to+0}\frac{\log(a^n+b^n)-\log 2}{n} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(a^x+b^x)\right|_{x=0} \\
&= \left.\frac{a^x\log a+b^x\log b}{a^x+b^x}\right|_{x=0} = \frac{\log a+\log b}{2}.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$\lim_{n\to+0}\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^{1/n} = \sqrt{ab}.$$

[問題-4] $f(x):=\sqrt{\cosh x}$ とするとき，$f(x)$ の $x=0$ のまわりでの Taylor 展開を x^4 の項まで求めよ．

(解) $f(x)=\sqrt{1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots}$ であって，$\sqrt{1+X}$ の $X=0$ のまわりでの Taylor 展開

$$\sqrt{1+X}=1+\frac{X}{2}-\frac{X^2}{8}+\cdots$$

を用いると，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^2 \\
&= 1+\frac{x^2}{4}+\left(\frac{x^4}{2\cdot 4!}-\frac{x^4}{8\cdot 2!}\right)+\cdots \\
&= 1+\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+\cdots.
\end{aligned}
$$

[問題-5] 次の函数は $(x,y)=(0,0)$ において連続か不連続かを答えよ．

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+xy+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ (2) $f(x,y)=\begin{cases}e^{-1/(x^2+y^2)} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(解) (1) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ (r\geq 0,\ 0\leq\theta<2\pi)$ とすると，$(x,y)\neq(0,0)$ のとき $f(x,y)=r\cos^3\theta/(1+\cos\theta\sin\theta)$. ここで任意の $\epsilon>0$ に対して $\delta_\epsilon:=\epsilon/2$ とすると $r<\delta_\epsilon$ ならば，$|f(x,y)-f(0,0)|<\epsilon$ が成り立つ．なぜならば，

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{r\cos^3\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}\right|\leq\frac{|r|}{\left|1+\frac{\sin 2\theta}{2}\right|}\leq 2r<\epsilon.$$

よって $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続である．

(2) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ (r\geq 0,\ 0\leq\theta<2\pi)$ とすると，$(x,y)\neq(0,0)$ のとき $f(x,y)=e^{-1/r^2}$. ここで任意の $\epsilon>0$ に対して $\delta_\epsilon:=(|\log\epsilon|)^{-1/2}$ とすると $r<\delta_\epsilon$ ならば，$|f(x,y)-f(0,0)|<\epsilon$ が成り立つ．なぜならば，

$$
\begin{aligned}
|f(x,y)-f(0,0)| &= e^{-1/r^2} \\
&< e^{-|\log\epsilon|}\leq e^{\log\epsilon}=\epsilon.
\end{aligned}
$$

よって $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続である．