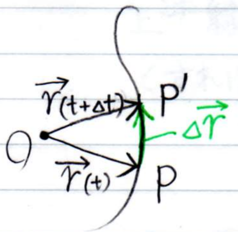
第3回　力学A①

Date H22・4・27 No.

$$= \sum_\alpha A_\alpha B_i C_\alpha - \sum_\alpha A_\alpha B_\alpha C_i$$
$$= (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B})_i - (\vec{A}\cdot\vec{B})(\vec{C})_i \quad \blacksquare$$

4. ベクトルの微分



$$\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$\vec{r}$ を位置ベクトルとすると、$\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ ：点Pの速度

$\vec{v}$ の成分は $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 　$\left(\dot{x} = \dfrac{d}{dt}x\right)$

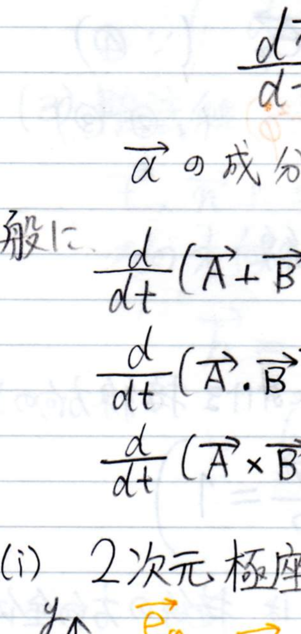
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$$ ：点Pの加速度

$\vec{a}$ の成分は $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ 　$\left(\ddot{x} = \dfrac{d^2}{dt^2}x\right)$

一般に

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot\vec{A}$$
$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \frac{d\vec{B}}{dt}\times\vec{A}$$

例 (i) 2次元極座標における速度，加速度の表現



$$\vec{r} = r\vec{e_r}$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\vec{e_r}} \quad \cdots\cdots ①$$

ここで、$\vec{e_r} = (\cos\varphi)\vec{i} + (\sin\varphi)\vec{j}$

$\vec{e_\varphi} = -(\sin\varphi)\vec{i} + (\cos\varphi)\vec{j}$

$$\therefore\ \dot{\vec{e}}_r = -(\dot{\varphi}\sin\varphi)\vec{i} + (\dot{\varphi}\cos\varphi)\vec{j}$$
$$= \dot{\varphi}(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j})$$
$$= \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad \cdots\cdots ②$$

同様にして

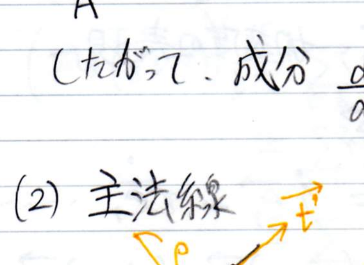
$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_r \quad \cdots\cdots ③$$

①, ②より.
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \cdots\cdots ④$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$
$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + (\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi$$
$$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})}_{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})}\vec{e}_\varphi \quad (\because ④)$$
$$(\because ②, ③)$$

例 (ii) 空間曲線の接線, 主法線, 陪法線

(1)



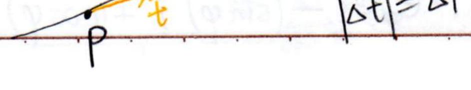
$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

$\vec{t} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ はPにおける接線方向の単位ベクトル

$$\left(\because \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\overline{PP'}}{\overset{\frown}{PP'}} = 1\right)$$

したがって. 成分 $\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}$ は 接線の方向全体

(2) 主法線



$$|\Delta\vec{t}| = \Delta\varphi$$

$$\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \underbrace{\frac{d\varphi}{ds}}_{曲率} = \frac{1}{\rho}$$

ρ: 曲率成分