第6回　力学A①（下村 裕 先生）

Date H22・5・25 No. ①

11.（つづき）

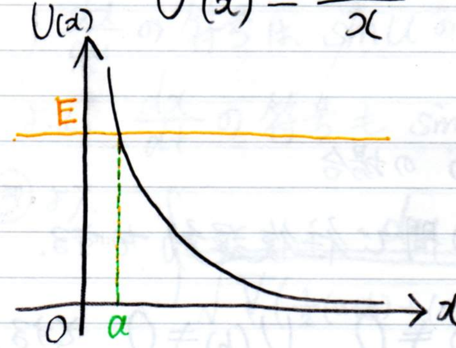
$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E - U(x) \quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2(E-U(x))}$$

$$\therefore \pm\int\frac{dx}{\sqrt{2(E-U(x))}} = t + (\text{定数})$$

例（i）

$$U(x) = \frac{\mu}{x} \quad (\mu > 0)$$



$x \geqq 0$ の部分で起きる運動.

（半無限）可動区間

$$a = \frac{\mu}{E} \leqq x < \infty$$

$t=0$ で $x=a$ とする.

$\frac{dU}{dx} < 0$ より、加速度は正なので、$\frac{dx}{dt}$ は負にならない。

$$\therefore \int\frac{dx}{\sqrt{2(E-U(x))}} = \frac{1}{\sqrt{2E}}\int\frac{x}{\sqrt{x(x-a)}}dx$$

$$= t + (\text{定数}) \quad \cdots\cdots ②$$

ハイパボリック関数

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$

$$\frac{d}{du}\cosh u = \sinh u$$

$$\frac{d}{du}\sinh u = \cosh u$$

$$x = \frac{a}{2}(\cosh u + 1) \cdots\cdots ③ \quad (u \geqq 0)$$

と置けば、

$$x - a = \frac{a}{2}(\cosh u - 1)$$

$$\sqrt{x(x-a)} = \frac{a}{2}\sinh u$$

$$dx = \frac{a}{2}\sinh u \cdot du$$

よって、$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x(x-a)}}\,dx = \frac{a}{2}\int(\cosh u + 1)\,du$

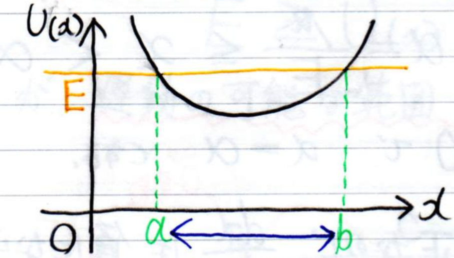
$\displaystyle= \frac{a}{2}(\sinh u + u) + (\text{定数})$

$t=0$ で $x=a$ なので、③より $t=0$ で $u=0$

したがって②より、 $\displaystyle\frac{a}{2}(\sinh u + u) = \sqrt{2E}\,t$ ……④

③, ④ から運動が決まる。

☆ 可動区間が有限 $a \leqq x \leqq b$ の場合



(a, b) 間で往復運動をする。

$U'(a) \neq 0,\ U'(b) \neq 0$ とする。

($x=a, b$ で傾きを持っている) (cf. 12節)

$2(E - U(x)) = (x-a)(b-x)V(x)$ とする。 ($V(x) > 0$ for $a < x < b$)

このとき、

$$\pm\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)V(x)}} = t + (\text{定数}) \quad \cdots\cdots ⑤$$

ここで、

$$x = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b)\cos u \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$= a + (b-a)\sin^2\frac{u}{2}$$

とおく。