数学Ⅱ②期末試験(理Ⅱ・Ⅲ　17,18,19,　他)

試験時間：90 分　問題用紙：1 枚　解答用紙：3 枚　計算用紙：1 枚

持ち込み：不可　担当教員：梶原

以下の問題について、解答用紙に答えよ。

ただし、どの問題の解答であるかが明確にわかるように解答用紙に記すこと。

1. 次の行列の固有値を求め、この行列が対角化可能であるか、説明せよ。

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ -3 & -1 & 6 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

2. 行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ の $A^n\ (n \geq 1)$ を求めよ。

3. 次の 2 次形式の符号を求めよ。

(1) $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz$　(2) $xy + yz + zx$

4. $n \geq 2$ とし、A を対角成分がすべて 0 に等しい n 次上三角行列とする。次の問いに答えよ。

(1) $A^n = O$ を示せ。

(2) $Ker\varphi_A \cap \mathrm{Im}\varphi_A = \{o\}$ ならば、$A = O$ を示せ。ここで、φ_A は A が定める線形写像 $\varphi_A : C^n \to C^n ; a \mapsto Aa$ を表す。

5. 以下、行列の成分はすべて複素数とし、$m, n \geq 1$ とする。n 次正方行列 A は n 個の異なる固有値をもつとし、n 次正方行列 B は $AB = BA$ をみたすとする。次の問いに答えよ。

(1) A の固有値 λ 対する固有ベクトル a に対して、$Ba \neq o$ ならば、Ba は A の λ に対する固有ベクトルであることを示せ。

(2) A の固有ベクトルからなる C^n の基底 $a_1, \ldots, a_n$ に関する B の表現行列は、対角行列であることを示せ。

(3) m 次多項式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m\ (a_0, \ldots, a_m \in C)$ が

$f(A)=a_0E+\cdots+a_mA^m=O$ を満たすならば、$m\geq n$ であることを示せ。ただし「異なる n 個の根をもつ複素係数多項式の次数は n 以上である」ことを証明せずに用いてよい。

(4) $V:=\{n$ 次正方行列 $X; AX-XA=O\}$($AX=XA$ をみたす n 次正方行列 X 全体) を、行列の和と複素数によるスカラー倍により C 線形空間とみなす。このとき、$E, A, \cdots, A^{n-1}$ は V の基底であることを示せ。

注. (3),(4)において、E は n 次単位行列を表す。