AとA'じゃわかりにくいので
AとBにしてみマシタ。

◎ $\vdash A\leftrightarrow B$ のとき $\phi\leftrightarrow\phi'$.

× $\vdash A\to B$ のとき $\phi\to\phi'$

CとIでは $\vdash\varphi\to\neg\neg\varphi$ だが
$\vdash\neg\neg\varphi\not\to\varphi$ だから扱いにくい。

プリントNo. 4 (10/06/04)

○置き換え定理の修正と証明

置き換え定理：$\vdash A\leftrightarrow B$ となる論理式A、Bが与えられたとき、任意の論理式 ϕ の中のAの現れのうち任意個をBに置き換えてできる論理式を ϕ' とすると、必ず $\vdash\phi\leftrightarrow\phi'$ が成立する。

（証明）ϕ の構成に関する帰納法で証明する。

方針：
すべての記号について1つずつ
示していく。

1．ϕ が論理演算子を含まないとき、ϕ はAそのものか、Aを含まないかのどちらかである。ϕ がAのとき、ϕ' はAかBであるから、いずれにせよ $\vdash\phi\leftrightarrow\phi'$。$\phi$ がAを含まないとき ϕ' は ϕ と同じだから、$\vdash\phi\leftrightarrow\phi'$

2．ϕ が $\chi\wedge\omega$ の形のとき、ϕ' は、$\chi'\wedge\omega'$ の形をしている。ここで、帰納法の仮定より、$\vdash\chi\leftrightarrow\chi'$、$\vdash\omega\leftrightarrow\omega'$ としてよい。このとき、

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\chi\wedge\omega}{\chi}\quad\dfrac{\vdots}{\chi\to\chi'}}{\chi'}\qquad\dfrac{\dfrac{\chi\wedge\omega}{\omega}\quad\dfrac{\vdots}{\omega\to\omega'}}{\omega'}}{\chi'\wedge\omega'}$$

より、$\chi\wedge\omega\vdash\chi'\wedge\omega'$。同様に $\chi'\wedge\omega'\vdash\chi\wedge\omega$。よって $\vdash\phi\leftrightarrow\phi'$。

3．ϕ が $\chi\vee\omega$ の形のとき、ϕ' は、$\chi'\vee\omega'$ の形をしている。ここで、帰納法の仮定より、$\vdash\chi\leftrightarrow\chi'$、$\vdash\omega\leftrightarrow\omega'$ としてよい。このとき、

$$\dfrac{\chi\vee\omega\qquad\dfrac{\dfrac{[\chi]\quad\dfrac{\vdots}{\chi\to\chi'}}{\chi'}}{\chi'\vee\omega'}\qquad\dfrac{\dfrac{[\omega]\quad\dfrac{\vdots}{\omega\to\omega'}}{\omega'}}{\chi'\vee\omega'}}{\chi'\vee\omega'}$$

より、$\chi\vee\omega\vdash\chi'\vee\omega'$。同様に $\chi'\vee\omega'\vdash\chi\vee\omega$。よって $\vdash\phi\leftrightarrow\phi'$。

4．ϕ が $\chi\to\omega$ の形のとき、ϕ' は、$\chi'\to\omega'$ の形をしている。ここで、帰納法の仮定より、$\vdash\chi\leftrightarrow\chi'$、$\vdash\omega\leftrightarrow\omega'$ としてよい。このとき、

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\chi']\quad\dfrac{\vdots}{\chi'\to\chi}}{\chi}\quad\chi\to\omega}{\omega}\quad\dfrac{\vdots}{\omega\to\omega'}}{\omega'}}{\chi'\to\omega'}$$

より、$\chi\to\omega\vdash\chi'\to\omega'$。同様 $\chi'\to\omega'\vdash\chi\to\omega$。よって $\vdash\phi\leftrightarrow\phi'$。

5．ϕが$\neg\chi$の形のとき、ϕ’は、$\neg\chi$’の形をしている。ここで、帰納法の仮定より、$\vdash \chi \leftrightarrow \chi$’としてよい。このとき、

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\chi'] \qquad \dfrac{\vdots}{\chi'\to\chi}}{\chi} \qquad \neg\chi}{\times}}{\neg\chi'}$$

より、$\neg\chi \vdash \neg\chi$’。同様に$\neg\chi$’$\vdash \neg\chi$。よって$\vdash \phi \leftrightarrow \phi$’。

○ 命題論理の健全性証明

命題論理の健全性：われわれの取り上げた命題論理体系は、真理値意味論に対して健全である。すなわち任意の論理式φについて　$\vdash\varphi$　⇒　φはトートロジー

（証明）前提の論理式の真理値がすべてTであるような証明の結論の真理値はTであることを示せばよい。証明において適用される規則の数nに関する帰納法をもちいる。

※前提も仮定もキャンセルしない。

n＝0のとき、証明の前提である論理式が、結論でもある。よってその真理値はT。

方針 すべての規則について、1つずつ示していく

n＞0のとき、最後の推論規則によって場合分けを行う。

前提がTなら結論もT（真理保存性）

・∧Ｉの場合、帰納法の仮定よりϕ、ψがT。このとき、$\phi\wedge\psi$はT。

・∧Ｅ１の場合、帰納法の仮定より$\phi\wedge\psi$がT。このとき、ϕはT。

・∧Ｅ２の場合、∧Ｅ１の場合と同様。

・∨Ｉ１の場合、帰納法の仮定よりϕがT。このとき、$\phi\vee\psi$はT。

・∨Ｉ２の場合、∨Ｉ１の場合と同様。

・∨Ｅの場合、帰納法の仮定より$\phi\vee\psi$はT。したがってϕかψの少なくとも一方はT。ϕがTとすると、このときϕからωへの証明に帰納法の仮定を適用できてωはT。ψがTのときも同様。

・→Ｉの場合、ϕがFなら$\phi\to\psi$はT、ϕがTならϕからψへの証明に帰納法の仮定が適用できてψはT、したがってこのときも$\phi\to\psi$はT。

・→Ｅの場合、帰納法の仮定よりϕ、$\phi\to\psi$がT。このとき、ψはT。

面倒

・¬Ｉの場合、ϕがTとすると、ϕから×への証明に帰納法の仮定が適用できて×がTとなり不合理。よってϕはFとしてよい。このとき$\neg\phi$はT。

・¬Ｅの場合、帰納法の仮定よりϕ、$\neg\phi$がともにT。これは起こりえない。

面倒

・矛盾規則の場合、×はFだから、帰納法の仮定より、これは起こりえない。

面倒

・二重否定除去規則の場合、帰納法の仮定より$\neg\neg\phi$がT．このとき、ϕはT。