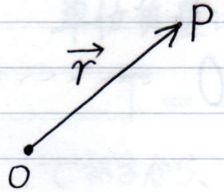
第7回　力学A ①（下村裕 先生）

Date H22・6・1　No. ①

## 13. 中心力による運動




中心力…固定点Oと質点Pとを結ぶ直線に沿って働く力（Oを力の中心と呼ぶ）

$$\vec{F} = K(\vec{r})\,\vec{r}\ ,\quad |\vec{F}| = |K|\,r \quad \begin{pmatrix} K<0 \Rightarrow \text{斥力} \\ K>0 \Rightarrow \text{引力} \end{pmatrix}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = K\vec{r}$$

$$\vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = K(\vec{r} \times \vec{r}) = 0$$

ここで、$\dfrac{d}{dr}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$

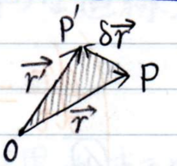
より、

$$\vec{l} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$$　運動の中心に関する運動量のモーメント（角運動量）

に対して、$\dot{\vec{l}} = 0$

よって、

> 中心力による質点の運動においては、その中心に関する角運動量は一定である。

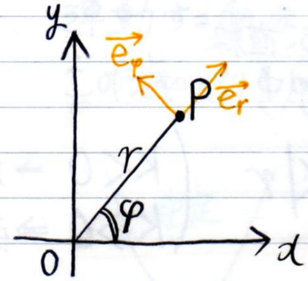



$$|\vec{r} \times \delta\vec{r}| \doteqdot 2\ (\triangle OPP' \text{の面積})$$

$\vec{r}$は$\vec{l}$に垂直であるから、質点Pは中心Oを含む$\vec{l}$に垂直な$\vec{r_0}$及び$\vec{V_0}$を含む平面内で運動する。

> 中心力が働く場合には、質点は一平面で運動し、単位時間に動径の掃過する面積は一定である。

5 の 二次元極座標によれば、




$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = f, \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\left(f = \frac{k}{m} r\right)$$

第2の方程式より、

$$r^2\dot{\varphi} = 一定 = h \quad \cdots\cdots ②$$

ここで $\vec{r} = (r, 0)$, $\dot{\vec{r}} = (\dot{r}, r\dot{\varphi})$ より、

$|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = r^2\dot{\varphi}$ だから、② は面積速度一定を示している。

以後は、$\dot{\varphi} > 0$ すなわち $h > 0$ となるような座標系をとる。

①, ② から $\dot{\varphi}$ を消去すれば、

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} = f \quad \cdots\cdots ③$$

$f$ が $r$ の関数である場合 $(f = f(r))$

$r = r(t)$ が ③ より求められる。

また、軌道については、

$$\frac{d}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi} = \frac{h}{r^2}\cdot\frac{d}{d\varphi} \quad \cdots\cdots ④$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = h\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right) = \frac{h^2}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)$$

により、t に関する微分係数を消去すれば、

$$\frac{h^2}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right) - \frac{h^2}{r^3} = f$$

より、$r = r(\varphi)$ が求まる。

この方程式は、$\frac{1}{r} = u$ とおけば、

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2 u^2} \quad \cdots\cdots ⑤$$