すなわち 原点を通り、$\vec{\omega}$ の方向にある直線上の点は、動かない。

この直線を、瞬間の回転軸といい、

ベクトル $\vec{\omega}$ を 角速度ベクトル あるいは 回転ベクトル という。

次に質点が運動座標系 $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ に対して

速度 $\dfrac{d^*\vec{r}}{dt}$ をもつ場合、

$$\frac{d^*\vec{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}$$

と書ける。

$$\left\{ \text{注：} \frac{d^{*2}\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^*}{dt}\left(\frac{d^*\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'} \right\}$$

前の考察と合わせると、静止座標系に対する速度 $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ は、

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^*\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

この関係は、任意のベクトル $\vec{A}$ に対しても成立する。

$$\boxed{\underbrace{\frac{d\vec{A}}{dt}}_{\text{絶対導関数}} = \underbrace{\frac{d^*\vec{A}}{dt}}_{\text{相対導関数}} + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

回転座標系の公式

例 $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ で、

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^*}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) + \vec{\omega}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^*}{dt}\left(\frac{d^*\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) + \vec{\omega}\times\left(\frac{d^*\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

$$= \frac{d^{*2}\vec{r}}{dt^2} + 2\vec{\omega}\times\frac{d^*\vec{r}}{dt} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \frac{d^*\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}$$

ここで、 $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d^*\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{\omega} = \dfrac{d^*\vec{\omega}}{dt} + \dot{\vec{\omega}}$ だから、

運動方程式

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^{*2}\vec{r}}{dt^2} + \underbrace{2\vec{\omega}\times\frac{d^*\vec{r}}{dt}}_{\text{コリオリ力}} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\text{遠心力}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}}_{\text{回転の加速度による見かけの力}}$$