物性物理学II・レポート問題　(令和元年度)

締切り：2019年8月9日（金）14:00、提出先：本館2階２９２号室前ボックス

担当：村上　修一

[1] ブロッホ波数 $\mathbf{k}=(k_x,k_y)$ の関数として表されているハミルトニアン

$$H(\mathbf{k})=\begin{pmatrix} M+B(\cos k_x+\cos k_y) & A(\sin k_x-i\sin k_y) & & \\ A(\sin k_x+i\sin k_y) & -(M+B(\cos k_x+\cos k_y)) & & \\ & & M+B(\cos k_x+\cos k_y) & A(-\sin k_x-i\sin k_y) \\ & & A(-\sin k_x+i\sin k_y) & -(M+B(\cos k_x+\cos k_y)) \end{pmatrix} \tag{1}$$

を考える。（なおこれは Bernevig-Hughes-Zhang 模型と呼ばれるトポロジカル絶縁体の模型である）　ここで A, B は正定数とし、M は実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) このハミルトニアンは時間反転対称性を満たすことを確かめよ。ただし時間反転対称性があるとは $H(-\mathbf{k})=\Theta H(\mathbf{k})\Theta^{-1}$ が満たされることであるとし、Θ は時間反転演算子で

$$\Theta=K\cdot i\begin{pmatrix} & & -i & \\ & & & -i \\ i & & & \\ & i & & \end{pmatrix} \tag{2}$$

とする。また K は複素共役演算子である。

(2) このハミルトニアンは空間反転対称性を満たすことを確かめよ。ただし空間反転対称性があるとは $H(-\mathbf{k})=PH(\mathbf{k})P^{-1}$ が満たされることであるとし、P は空間反転を表す演算子で

$$P=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

とする。

(3) この系の逆格子ベクトル $\mathbf{G}$ は、任意の $\mathbf{k}$ に対して $H(\mathbf{k})=H(\mathbf{k}+\mathbf{G})$ を満たすベクトルである。逆格子基本ベクトル (逆格子の集合の基底をなすベクトル) $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ を求めよ。さらにそこから時間反転不変波数 (TRIM) 4つを求めよ。（なお時間反転不変波数とは、$\mathbf{k}\equiv-\mathbf{k}\ (\mathrm{mod}\ \mathbf{G})$ となる波数のことである）

(4) (3) で求めた時間反転不変波数 (TRIM) を $\mathbf{\Gamma}_i$ $(i=1,2,3,4)$ と書くことにする。それぞれの TRIM $\mathbf{\Gamma}_i$ $(i=1,2,3,4)$ において固有状態を求めると、２重縮退した状態が２組得られる。そのうちエネルギーの低い方の状態２つのみ考える。パリティ固有値 (空間反転演算子 P の固有値) ξ_i はこの縮退した２状態で共通であり、$+1$ ないし -1 の値をとる。これから

$$(-1)^\nu=\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 \tag{4}$$

として、Z_2 トポロジカル不変量と呼ばれる量 $\nu\ (=0,1)$ を定義することにする。$\nu=1$ なら２次元トポロジカル絶縁体、$\nu=0$ なら通常の絶縁体である。M の値を変化させたときに、M のどの範囲でトポロジカル絶縁体となり、どの範囲で通常の絶縁体となるか求めよ。

[2] xy 面内の 2 次元電子系に垂直に磁場 $\mathbf{B}=(0,0,B)$ をかけたときのハミルトニアンは

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2m}(\Pi_x^2+\Pi_y^2),\ \ \Pi_\alpha=p_\alpha+eA_\alpha=-i\hbar\frac{\partial}{\partial r_\alpha}+eA_\alpha\ (\alpha=x,y) \qquad (5)$$

と表される。この固有状態を以下の手続きで求めるが、講義とは異なり

$$\mathbf{A}=\frac{B}{2}(-y,x,,0)$$

というベクトルポテンシャルをとる。このとき次の問いに答えよ。なお以下では磁気長 $\ell=\sqrt{\dfrac{\hbar}{eB}}$, サイクロトロン周波数 $\omega_c=\dfrac{eB}{m}$ とする。

(1) $a=\dfrac{\ell}{\sqrt{2}\hbar}(\Pi_x-i\Pi_y)$, $b=\dfrac{1}{\sqrt{2}\ell}(x+iy)+\dfrac{\ell}{\sqrt{2}\hbar}i(\Pi_x+i\Pi_y)$, と定義する。これらは x, y の代わりに $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$ を用いて表すと扱いやすい。x, y の代りに z, $\bar{z}$ を独立変数として選ぶことで、a, b, $a^\dagger$, $b^\dagger$ を z, $\bar{z}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ を用いて表せ。

(2) $[a,a^\dagger]=1$, $[b,b^\dagger]=1$ を示せ。(なお a や $a^\dagger$ と、b や $b^\dagger$ とは可換である)　これらより a, b は独立なボーズ粒子系を表している。

(3) $H=\hbar\omega_c\left(a^\dagger a+\dfrac{1}{2}\right)$ を示せ。

(4) a,b のボーズ粒子とも 0 個になっている固有状態 $\psi_0(z,\bar{z})$ (ただし $a\psi_0(z,\bar{z})=0$, $b\psi_0(z,\bar{z})=0$) を計算せよ。規格化はしなくてよい。なおこれらは a,b のボゾンとも 0 個の状態なので、$E=\dfrac{1}{2}\hbar\omega_c$ に対応する。

(5) $\psi_m(z,\bar{z})\propto(b^\dagger)^m\psi_0(z,\bar{z})$ を計算せよ。規格化はしなくてよい。なおこれらは b のボゾンが m 個あり a のボゾンは 0 個の状態なので、$E=\dfrac{1}{2}\hbar\omega_c$ に対応する。これら $\psi_m(z,\bar{z})$, $m=0,1,2,\cdots$ の状態が、最低エネルギーのランダウ準位 $E=\dfrac{1}{2}\hbar\omega_c$ を構成する波動関数である。

(6) $\psi_m(z,\bar{z})$ について、原点からの距離 r として $r^2\equiv x^2+y^2$ の値の期待値を求めよ。

(7) 系が面積 S の円であり、この面積 S が非常に大きいとして、$E=\dfrac{1}{2}\hbar\omega_c$ を持つ状態の縮重度を (6) から見積もれ。((6) の答えで原点からの距離が系の半径より小さいもののみ許される、と考えればよい)