統計力学II(笹本)　中間試験

2019.7.8

以下の問に答える際, $\hbar, k_B$ は自由に用いてよい.

【1】粒子数 N の変化も考慮にいれた場合の, 内部エネルギー U の微小変化に関する熱力学恒等式は $dU = TdS - pdV + \mu dN$ で与えられる. (T, S, p, V, μ の意味は講義中と同じ.)
(i) 自由エネルギー $F = U - TS$, ギブスの自由エネルギー $G = F + pV$ の微小変化に関する熱力学恒等式を書け.
(ii) 熱力学ポテンシャル を $J = F - N\mu$ で定義する.
(a) J の微小変化に関する熱力学恒等式を書け.
(b) (a) の結果を J/T の微小変化に関する式に書き直せ.
(c) $J = -pV$ であることを示せ.
(iii) 着目している系 A がリザバー B(熱浴かつ粒子浴) と接触しているとする. A+B を孤立系とみなし, 等重率の原理を適用して, 着目系 A がエネルギー E, 粒子数 N を持つある状態にある確率がグランドカノニカル分布 $\frac{1}{\Xi}e^{-\beta(E-\mu N)}$ で与えられることを導出せよ. ただし $\beta = 1/(k_B T)$.
(iv) グランドカノニカル分布において粒子数の平均 $\langle N \rangle$ を大分配関数 Ξ を用いて表せ.
(v) グランドポテンシャル J を Ξ から計算する公式を書け.
(vi) (v) の公式が正しい根拠を述べよ.

【2】(i) ボソン同種 N 粒子が, 1 粒子状態 $j_1, \cdots, j_N$ にあるときの波動関数 Ψ を書け (規格化はしなくてよい). ただし 1 粒子状態の固有状態は $\psi_j(\vec{x})$ で与えられるとする.
(ii) Bose 分布関数 $f_B(\epsilon) = 1/(e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1)$ を導出せよ.

【3】フェルミ分布関数 $f_F(\epsilon) = 1/(e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1)$ と関数 $h(\epsilon)$ に対して

$$I(\beta, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon h(\epsilon) f_F(\epsilon)$$

と定義する. 温度を T とする.
(i) 次の公式を示せ

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{e^x + 1} dx = (n-1)!(1 - 2^{1-n})\zeta(n) \tag{1}$$

ただし n は正整数, $\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ は ζ 関数.
(ii) 低温展開の公式

$$I(\beta, \mu) = \int_{-\infty}^{\mu} h(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 h'(\mu) + O((k_B T)^4) \tag{2}$$

を導出せよ.

以下 3 次元理想電子気体 (1 粒子質量 m, 粒子数 N, 体積 V) の場合を考える.
(iii) 状態密度 $D(\epsilon)$ を求めよ.
(iv) フェルミエネルギー ϵ_F を求めよ.
(v) 低温での化学ポテンシャル μ を T^2 のオーダーまで求めよ.
(vi) 低温での比熱 C を T^1 のオーダーまで求めよ.
