数学IA（理科I類対象）2010年春、担当・織田

4月8日（木)、一回目：

**始めに**

難波誠　著：「微分積分学」の最初の部分に、実数全体の集合 $\mathbf{R}$ に対する公理として
I：「アルキメデスの公理」と、II：「カントールの公理」の二つがあげられている。

初回の講義では、これらの背景をなす考え方を述べた。これは、どのように有理数全体 $\mathbf{Q}$ から実数を構成する問題でもある。

**0**: 第一段階：自然数から有理数へ、歴史的なメモ

これは、古代の数学からの歴史を振り返ることで簡単に見よう。厳密に自然数全体 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,\}$ から有理数を作るのは2，3ページで書けるが、ここでは書かない。エジプトのプトレマイオス朝（ラゴス朝ともいう）の都であるアレキサンドリアで活躍したエウクレイデス (Euclid) の「原論」（ストイケイア）の中で扱われているように、最初の有理数は、幾何学的に自然数の長さをもつ二つの線分の長さの比として、つまり $a:b$ のような形でとらえられた。それ以前にバビロニアでは $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ などの分子が1の分数は運用されていたが、$\frac{2}{5}$ などは自由に使えなかった。$\sqrt{2}$ が有理数でないことは、この時代には認識されていて、それは2次曲線で囲まれた図形二つの面積の等しさを言う、アルキメデスの「取り尽くし法」などアイデアを生み出した。これは極限操作の原始的な形とも思える。

正の分数から、負の数に至る道のりには長い時間を要した。インドでの零、つまりゼロの発見や、アラビア文字（実はインド文字）による位取りの計算法の発見と普及が、400年ほど前に、無限小数展開の認識にいたり、それが実数の、しかも「長さ」や「面積」のような「次元」をもつ「量」でなく、自然数と同様の、「抽象化した数」としての実数の概念をもたらした。これを論理的に厳密に扱うにはさらに200年ほどかかった。微分積分学の基礎的な部分は、それ以前に完成しているので、それ以前の数学者は、Cauchy の見出した、収束点列のきちんとした一般的な概念は知らなかった。

さて何れにせよ、有理数は知っているとする。大切なことは、ここで0でない有理数は、正であるか負であるかであることである。有理数 $r_1, r_2$ があるとき、必ず $r_1>r_2$ か $r_1=r_2$ か $r_1<r_2$ であるかの何れか一つの場合が生じ、その一つの場合しかないことが、分かりこれは大小関係を決めている。これは $r_1-r_2$ が正か負か零かで分かる。

**1** 有理数から実数へ

$\sqrt{2}$ は有理数ではないが、これに近い数は、小数点何位かまで自由に高い精度で計算できる。つまり、

$$1,\quad 1.4,\quad 1.41,\quad 1.414,\quad 1.4142,\quad 1.41421,\quad 1.414213,$$

と展開し続けていけば、この数列（有理数の数列）の到達点に、「無限の彼方の到達点」に、$\sqrt{2}$ を表す「実数」があると思うのは、人間の素直な直観である。これをきちんと定式化したのが、Cauchy 点列の概念であり、これに基づく「数列の収束」の概念である。

**定義 (0.1)** 有理数の点列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots,}$ が次を満たすとき Cauchy 列であるという：

すなわち、任意の正の（有理数）$\epsilon$ に対して、ある $N$ があって $m$, $n$ が $n_0$ より大きいとき

$$|a_m - a_n| < \epsilon$$

とできる。

ここでは、$\epsilon$ は小さな数で、しかも「任意」とあるのは、次々に、「許容誤差」であるこの数を $\epsilon_1 = \frac{1}{10}$, $\epsilon_2 = \frac{1}{100}$, $\epsilon_3 = \frac{1}{1000}, \cdots$, と要求水準を厳しくする「悪魔」がいて、それに対し天使が、$N_1$, $N_2, \cdots$, とより大きな $N$ を準備して、その番号から先の $a_m$, $a_n$ の差が、許容誤差 $\epsilon_i$ より小さいバラツキに留まることを言っている。最終的に天の勢力が勝つのが「収束」である。

Cauchy 点列の最終到達点が有理数であれば、それでよいが $\sqrt{2}$ のように無理数になるとき、どうしようもないので、「点列が実数を定めている」と開き直って考える。

問題は「同じ実数」でも、別の点列で定義される場合があることである。有名な例が：

$$1.00000\cdots = 0.9999\cdots$$

である。

もっと意味ありげな点列だと、円周率を有理数で近似していくのに、

$$\frac{22}{7}, \cdots$$

という早く誤差が小さくなる洒落た数列と、愚直に一桁ずつ近似をあげる

$$3.14159265\cdots$$

と二通りのやり方がある。この二つの数列が同じ実数を決めていることを、どのように定義すれば正しいか？

**定義 (0.2)**　二つの収束点列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に対して、任意の正の（有理）数 $\epsilon$ に対してある（充分大きな）$n_0$ が存在して、$n \geq n_0$ ならば $|a_n - b_n| < \epsilon$ が成立するようにできるとき、二つの数列は「同値」であるという。

同値な数列は同じ実数を定めると考える。この考えが正しいためには、次を示す必要がある。

**定理 0**　3 つの収束点列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ がある。前の二つの数列が同値で、後の二つも同値であるとき、1 番目の数列と最後の数列も同値である。

こうして、同じ「実数」に収束する無限に異なる、有理数からなる収束点列はあるかも知れないが、同値なものはその「同じ実数」を定めると思う。収束点列として、特に分母が１０のべき乗の形の有理数のみ考えるのが、伝統的な実数の無限小数表示である。

講義でやった実数の「完備性」とは、こうしてさらに実数の数列を考え、その Cauchy 列を考えると、それはある実数を定めていることを示せる、という**定理** である。この内容は、教科書の定理 1.10 と同じことを言っているのであるから、つまり、「カントールの公理」II は、現在の、このノートの立場からは、より基本的な公理（自然数の公理など）から導かれる、定理となる。

昔の学生の「標準教科書」

高木貞治：解析概論（改訂第３版、軽装版）岩波書店
これが難しいので、書かれた本
杉浦光夫：解析学序説　東京大学出版会

歴史的な文献：
デーデキンド『数について』(岩波文庫／ISBN4003392418).