

科目名 振動・波動 (20618, 20924)	教員名 菊川 芳夫	2月14日(水) 2時限 試験時間 90分
指定クラス 1年理 2,3(14-15,17-18,20-21,23) 1年理 1(4-5,13,22-23, 28, 37), 2年理	解答用紙(両面)+計算用紙 2枚 + 1枚	持ち込みの有無 不可

問題1 おもりの質量 M , ひもの長さ l の振り子を, バネ定数 K のバネを用いて直線状に等間隔 a で連結した3連成振子を考える。(図1) この系の微小な縦振動を例に「基準振動」とは何か説明せよ。(基準振動数, 基準振動の形(振幅の比), 基準座標を具体的に求めること。)

問題2 図2の様な装置で振動実験を行う。おもりは半径 a の球体で, 質量は m とする。メスシリンダー内の液体は粘度の高いシリコンオイルで, 粘性係数を η とすると, おもりの速度 v に比例する抵抗力 $-6\pi a\eta v$ をおもりに及ぼすものとする。バネはフックの法則に従うものとし, バネ定数は k とする。また, 糸をつるしている滑車は軽く, なめらかに回転するものとする。

1. おもりの鉛直方向の運動を記述する運動方程式をかけ。
2. おもりを平衡の位置から鉛直方向に移動させて, その後, 静かに放す。このとき振動がおこるための条件を述べよ。
3. 周期的な外力, $F(t) = F_0 \cos \omega t$, をかけ始めてから十分に時間がたったときの運動方程式の解を求め, おもりの振幅 A と位相 ϕ の ω 依存性を表すグラフを描け。
4. 外力の仕事率の1周期平均, $\bar{P} = (1/T) \int_0^T F(t) \dot{x}(t) dt$ ($T = 2\pi/\omega$), は共鳴がおこっているとき最大値をとる。この理由を, 外力 $F(t)$ とおもりの速度 $\dot{x}(t)$ の位相差と関係づけて説明せよ。

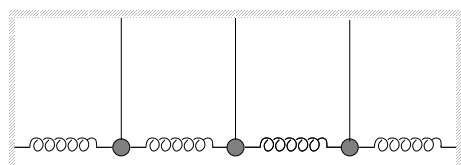


図1

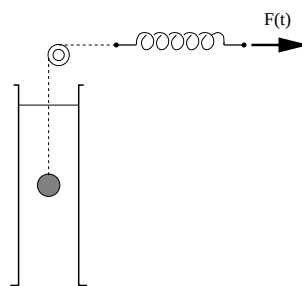


図2

問題3 線密度 σ の弦が張力 T で張られている。

A) 弦にそって x 座標をとり，弦の微小振動の振幅を $u(x, t)$ で表す。

1. 弦の微小振動を記述する波動方程式をかけ。

2. $\sigma = 2.9 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$, $T = 48 \text{ N}$ のとき，弦を伝わる波の速さ v を概算せよ。

B) 弦の長さは L で，両端が固定されているとする。端点は $x = 0$ 及び $x = L$ とする。

3. 弦の両端から $L/4$ のところを，長さ A だけ非対称に引っ張る。(図3)

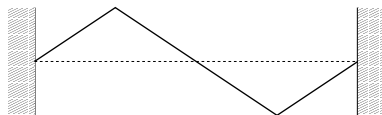


図3

このとき (時刻 $t = 0$) の弦の形 $u(x, 0)$ を次のようにフーリエ級数展開で表す:

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ a_m \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \right\}$$

係数 $a_0, a_m, b_m (m = 1, 2, \dots)$ の値として正しいと考えられるものを次の a), b), c) のうちから選べ。また，その理由を簡潔に述べよ。

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_m = \begin{cases} (-1)^n \left(\frac{4A}{(2n+1)\pi} \right) & (m = 2n+1, n = 0, 1, \dots) \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \\ b_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots) \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots) \\ b_m = \begin{cases} (-1)^n \left(\frac{8A}{(2n+1)^2\pi^2} \right) & (m = 2n+1, n = 0, 1, \dots) \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots) \\ b_m = \begin{cases} (-1)^n \left(\frac{8A}{(2n+1)^2\pi^2} \right) & (m = 2(2n+1), n = 0, 1, \dots) \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

4. その後，静かに弦を放す。弦の振幅の時間発展 $u(x, t)$ を求めよ。

C) 弦の長さは無限大で，弦の一端が自由端になっているとする。端点を $x = 0$ とし， $x \geq 0$ の領域に張られているとする。

5. 端点にむかって入射する進行波の時刻 $t = 0$ の振幅 $u(x, 0)$ が次であたえられる:

$$u(x, 0) = A \exp\{-c(x - x_0)^2\} \quad (A, c, x_0 \text{ は正の定数})$$

その後の弦の振幅の時間発展 $u(x, t)$ を求めよ。