# 相対論 2002-3, 2005-3, 2007-4 解説(仮)

・2階の反変テンソル：$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho F^{\sigma\rho}$ となるF（cf. 2階の共変テンソル：$F'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\sigma \Lambda_\nu{}^\rho F_{\sigma\rho}$）

つまり $F'^{12} = \Lambda^1{}_\sigma \Lambda^2{}_\rho F^{\sigma\rho} = \overbrace{\Lambda^1{}_0\Lambda^2{}_0F^{00} + \Lambda^1{}_0\Lambda^2{}_1F^{01} + \Lambda^1{}_0\Lambda^2{}_2F^{02} + \Lambda^1{}_1\Lambda^2{}_0F^{10} + \cdots + \Lambda^1{}_2\Lambda^2{}_2F^{22}}^{9個の和}$

・これをふまえた上で、「$f_\mu = (F^{12}, F^{20}, F^{01})$ が共変ベクトル」とはどういうことか？

→一般に共変ベクトルとは $f'_\mu = R_\mu{}^\nu f_\nu$ となるfのことなので、

$f'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu f_\nu$　Fのときの Λ と同じもの

となればよい。

・「$\Lambda_\mu{}^\nu$」とは？

$$\boxed{\Lambda_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\sigma}\Lambda^\sigma{}_\rho \eta^{\rho\nu}}$$

η：計量（変換の種類によって決まる量。ローレンツ変換の場合 $\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$））

→つまり $\Lambda_\mu{}^\nu = \eta \Lambda^\mu{}_\nu \eta$ とすれば得られる。

・今回の場合

ローレンツ変換

$$\begin{cases} ct' = \gamma_v(ct - \beta_v x) \\ x' = \gamma_v(-\beta_v ct + x) \\ y' = y \end{cases} \quad より \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v\beta_v & 0 \\ -\gamma_v\beta_v & \gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (111)$$

$$\therefore \Lambda_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Lambda^\mu{}_\nu \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_v & \gamma_v\beta_v & 0 \\ \gamma_v\beta_v & \gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

要は $f'_\mu = \begin{pmatrix} F'^{12} \\ F'^{20} \\ F'^{01} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \Lambda^1{}_\sigma \Lambda^2{}_\rho F^{\sigma\rho} \\ \Lambda^2{}_\sigma \Lambda^0{}_\rho F^{\sigma\rho} \\ \Lambda^0{}_\sigma \Lambda^1{}_\rho F^{\sigma\rho} \end{pmatrix} = \Lambda_\mu{}^\nu \begin{pmatrix} F^{12} \\ F^{20} \\ F^{01} \end{pmatrix}}$ を示す。

・具体的な解法

$\Lambda^\mu{}_\nu$ の形を見ればわかるように、$\Lambda^0{}_2 = \Lambda^1{}_2 = \Lambda^2{}_0 = \Lambda^2{}_1 = 0$。よって

$$(左辺) = \begin{pmatrix} \Lambda^1{}_0\Lambda^2{}_2F^{02} + \Lambda^1{}_1\Lambda^2{}_2F^{12} \\ \Lambda^2{}_2\Lambda^0{}_0F^{20} + \Lambda^2{}_2\Lambda^0{}_1F^{21} \\ \Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_0F^{00} + \Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_1F^{01} + \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_0F^{10} + \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_1F^{11} \end{pmatrix}$$

さらに、題意の $F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}$ より $F^{21}=-F^{12}$、$F^{02}=-F^{20}$、$F^{01}=-F^{10}$、$F^{00}=0$、$F^{11}=0$ なので

$$(左辺)=\begin{pmatrix} -\Lambda^1{}_0\Lambda^2{}_2F^{20}+\Lambda^1{}_1\Lambda^2{}_2F^{12} \\ \Lambda^2{}_2\Lambda^0{}_0F^{20}-\Lambda^2{}_2\Lambda^0{}_1F^{12} \\ \Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_1F^{10}-\Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_0F^{01} \end{pmatrix}$$

$\Lambda^\mu{}_\nu$ の成分を代入して

$$(左辺)=\begin{pmatrix} \gamma_v\beta_vF^{20}+\gamma_vF^{12} \\ \gamma_vF^{20}+\gamma_v\beta_vF^{12} \\ \gamma_v{}^2F^{10}-\gamma_v{}^2\beta_v{}^2F^{10} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma_vF^{12}+\gamma_v\beta_vF^{20} \\ \gamma_v\beta_vF^{12}+\gamma_vF^{20} \\ F^{10} \end{pmatrix} \quad \left(\because \gamma_v=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_v{}^2}} \text{ より } \gamma_v{}^2(1-\beta_v{}^2)=1\right)$$

$$=\Lambda_\mu{}^\nu\begin{pmatrix} F^{12} \\ F^{20} \\ F^{01} \end{pmatrix}=(右辺)$$

□