2010(平成22)年度 後期 微分積分学B

$\boxed{1}$ (1) $\mathbb{R}^2$の部分集合$M=\{(x,y) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2,$ 「$0<x^2+y^2<1$」または「$y=x,\ 1<x\leqq 2$」$\}$について，Mの境界(Mの境界点の全体)を図示せよ．

(2) $\mathbb{R}^3$の部分集合$M=\{(x,y,z) \mid (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z=0\}$に内点はあるか．

$\boxed{2}$ $D=\{(x,y) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0<x,\ 0<y\}$とし，

$$f(x,y)=\frac{x^3-y}{x^3+y} \quad ((x,y)\in D)$$

とおく．半直線$L: x=\alpha t,\ y=\beta t\ (t>0)$ （ただし$\alpha>0,\ \beta>0$）に沿ってのfの極限値$\lim_{t\to+0} f(\alpha t,\beta t)$を求めよ．$f$は$(x,y)\in D,\ (x,y)\to(0,0)$のとき，収束するか(極限値をもつか)．

$\boxed{3}$ $f(x,y,z)=(1+x)^a(1+y)^b(1+z)^c \quad ((x,y,z)\in\mathbb{R}^3)$の第3階偏微分係数$f_{xyz}(0,0,0)$を求めよ．ただし$a,\ b,\ c$は正の整数．

$\boxed{4}$ $F(x,y,z)=(x+z)^3+(y+z)^3+x+y+z \quad ((x,y,z)\in\mathbb{R}^3)$とおく．$F(x,y,z)=0$から，$(x,y,z)=(0,0,0)$のある近傍で$x,y$の関数$z(x,y)$がただひとつ決まることを示し，$(x,y)=(0,0)$における$\dfrac{\partial z}{\partial x}$の値を求めよ．

$\boxed{5}$ $A=\{(x,y) \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq y^3\}$，$f(x,y)=(y^4+1)^a$ （ただし$a>0$）とおく．

(1) 二重積分$\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dxdy$を二通りの累次積分で表せ．

(ア) yについての積分，次にxについての積分の形

(イ) xについての積分，次にyについての積分の形

(2) $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dxdy$を求めよ．

$\boxed{6}$ $n\geqq 2,\ D=\{x \mid x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ x_1>0,\cdots,x_n>0\}$とし，

$$f(x)=x_1\times\cdots\times x_n \quad (x\in D), \qquad \varphi(x)=x_1+\cdots+x_n-n \quad (x\in D)$$

とおく．条件$\varphi(x)=0$のもとで，fが極値となりうる点は$(1,\cdots,1)$(すなわち$x_1=\cdots=x_n=1$となる点)だけであることを，Lagrangeの未定乗数法を用いて示せ．