(1) テキスト P29

拡大係数行列を簡約化する。

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right) \cdots ① \\ \cdots ② \\ \cdots ③$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right) \cdots \{②+①\times(-2)\}\times\frac{1}{3} \\ \cdots ③+①\times(-3)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 18 & 0 \end{array}\right) \cdots \{②+③\times(-1)\}\times\frac{1}{6} \\ \cdots ③\times(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \cdots ② \\ \cdots ③$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & -15 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \cdots ①+②\times(-1) \\ \cdots ②+③\times(-6)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \cdots ①+③\times 5$$

よって $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_4 = -3x_5 \end{cases}$

ここで、$x_3 = a$, $x_5 = b$ とおくと
(a, b は任意の数)

$$\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2a \\ a \\ -3b \\ b \end{array}\right) \quad (a, b\ は任意の数)$$

(2) $A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \end{array}\right)$, $E = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ として

3×6 行列 $[A \vdots E]$ を簡約化する

$$\left(\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
ココを $\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ にする.

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdots ① \\ \cdots ②$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 16 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 23 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \cdots ②+①\times(-2) \\ \cdots ③+①\times(-3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 16 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & -1 & 5 \end{array}\right) \cdots \{③+②\times(-\frac{7}{5})\}\times 5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{18}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -5 & 16 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & -1 & 5 \end{array}\right) \cdots ①+②\times\frac{3}{5}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & 1 & -6 \\ 0 & -5 & 0 & \frac{115}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{80}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -7 & -1 & 5 \end{array}\right) \cdots ①+③\times(-\frac{6}{5}) \\ \cdots ②+③\times(-\frac{16}{3})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{23}{3} & \frac{2}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right) \cdots ②\times(-\frac{1}{5})$$

以上から、A の逆行列 A^{-1} は、

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 9 & 1 & -6 \\ -\frac{23}{3} & \frac{2}{3} & \frac{16}{3} \\ -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right)$$