問題 4 [20 点]

ヘビサイド関数やデルタ関数を使って、次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ [10 点].

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \sin x & (x \leqq \pi) \\ f_2(x) = x & (\pi < x) \end{cases}$$

また、$f(x)$ のグラフ [3 点] と $f'(x)$ のグラフ [7 点] も描け.

問題 5 [35 点]

1 次元の直線上を運動する質量 m の粒子の時間 t における位置を表す関数を $f(t)$ とする．この粒子は，バネ定数 k のバネにつながれ，外力 $g(t)$ を受けており，さらに速度に比例する抵抗 $c\dfrac{df}{dt}$ を受けながら運動をしている．このとき関数 $f(t)$ は次の 2 階定数係数常微分方程式

$$m\frac{d^2f}{dt^2} + c\frac{df}{dt} + kf = g(t) \qquad (*)$$

を満たす．さて，定数や外力が

$$m = 1, \quad c = 7, \quad k = 12 \quad \text{および} \quad g(t) = \cos 2t$$

であるときに，この微分方程式の一般解をフーリエ変換によって求めよう．

［注：特殊解は $f(x) = A\cos x + B\sin x$ と仮定することによって初等的に求めることができる．ここでは，フーリエ変換による解法を問題としている.］

1. $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ（既知の量であらわせ）[10 点].
2. 式 $(*)$ の特殊解を逆フーリエ変換 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$ によって求めよ [10 点]..
3. 式 $(*)$ の右辺を 0 にした同次方程式の一般解 $f_0(t)$ を求めよ [5 点].
4. 式 $(*)$ の一般解を求めよ [5 点].
5. 得られた一般解が式 $(*)$ を満たしていることを確かめよ [5 点].

以 上