2011(平成 23) 年度 後期 微分積分学 B (吉原)

$\boxed{1}$ M_1, M_2, M_3 を次のような $\mathbb{R}^2$ の部分集合とし，$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ とする.

$$M_1 = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x|<1,\ |y|<1\},$$
$$M_2 = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1<x \leqq 2,\ y=x\}, \quad M_3 = \{(2,1)\}$$

(1) M の境界 (M の境界点の全体) を図示せよ.

(2) M の元ではあるが M の集積点にはなっていない点はあるか.

$\boxed{2}$

$$f(x) = \frac{x_1 \times \cdots \times x_n}{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \quad (x=(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0)$$

とおく．ただし $n \geqq 2$ とする.

(1) $|x_1 \times \cdots \times x_n| \leqq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^a$ $\boxed{\frac{n}{2}}$ $(x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqq 1)$ となる最大の実数 a は $\dfrac{n}{2}$ であることを示せ.

(2) $n \geqq 3$ ならば，$x \to 0$ のとき f は収束する (極限値をもつ) ことを示せ.

$\boxed{3}$ $f(x,y,z) = xyze^{x+y+z}$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$ の第 3 階偏微分係数 $f_{xyz}(0,0,0)$ を求めよ.

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 $u = xyz,\ v = xy - xyz,\ w = y - yz$ の関数行列式 $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ を求めよ.

$y = xe^x$

$\boxed{5}$ $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3xyz$ $((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$ とおく．$F(x,y,z)=0$ から，$(x,y,z)=(1,1,1)$ のある近傍で x, y の関数 $z(x,y)$ がただひとつ決まることを示し，$(x,y)=(1,1)$ における $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ の値を求めよ.

$y' = e^x + xe^x$

$\boxed{6}$ $A = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| \leqq y \leqq 1\}$，$f(x,y) = \cos(ay^2+b)$ (a, b は定数，$a \neq 0$) とおく． $(x+1)e^x$

$0 \leqq y \leqq 1$

(1) 二重積分 $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dxdy$ を二通りの累次積分で表せ.

(ア) y についての積分，次に x についての積分の形

(イ) x についての積分，次に y についての積分の形

(2) $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dxdy$ を求めよ.

$\boxed{7}$ $n \geqq 2$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とする．すべての $a \in \mathbb{R}^n$ について

$$f(a+h) - f(a) = o(\|h\|), \quad (h \to 0)$$

となるならば，「$f(x) \equiv$ 定数」となることを示せ.

$x_1 + \cdots + x_n^2 \leqq 1$