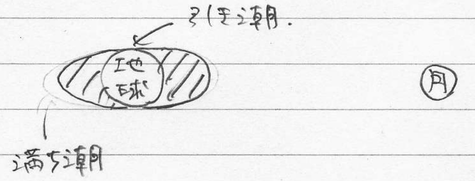
(3)




潮の満ち干は潮汐力によって引き起こされる。潮汐力は月によって地球のまわりの重力場に勾配が生じることで起きる。月の真下の海面では月に近いためより強く引きつけられ、逆に月の反対側の海面では引きつける力は弱い。そのため片方がより強く月にひきつけられ、海はとり残される。これらの位置では上向きの潮汐力となる。このように潮汐力は力の差で生じる。

(4-1) A 運動量

B. $\dfrac{Mm}{M+m}$

C. 角運動量

D. エネルギー

(4-2)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \cos\theta\dfrac{dr}{dt} - r\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} = \sin\theta\dfrac{dr}{dt} + r\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

であるから、

$\dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \dfrac{GmM}{r} = E$ に代入して、

$$E = \frac{m}{2}\left\{\left(\cos\theta\frac{dr}{dt} - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\sin\theta\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} - \frac{GmM}{r}$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{GMm}{r}$$

//

(4-3) 角運動量の大きさ L について、

$\mathbb{r} = (x, y, 0)$, $\mathbb{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, 0\right)$ なので、

$$L = |\mathbb{r}\times\mathbb{P}| = m|\mathbb{r}\times\mathbb{v}|$$

$$= m\left[x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right]$$

$$= mr\cos\theta\left(\sin\theta\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right) - mr\sin\theta\left(\cos\theta\frac{dr}{dt} - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$= mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

となるから、

(4-2) より、EにLを代入すると、

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 - \frac{GMm}{r}$$

E<0で楕円軌道となるので、$u = \dfrac{1}{r}$ を代入して、

$$r = \frac{1}{u}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$$

$$E = \frac{1}{2}m\cdot\frac{1}{u^4}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m}u^2 - GMmu.$$

$\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{L}{mr^2} = \dfrac{L}{m}u^2$, $\dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{\left(\frac{du}{dt}\right)}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}$ より、

$$\frac{du}{dt} = \frac{L}{m}u^2\left(\frac{du}{d\theta}\right)$$

を使うと、

$$E = \frac{1}{2}m\cdot\frac{1}{\cancel{u^4}}\cdot\frac{L^2}{m^2}\cancel{u^4}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}u^2 - GMmu$$

$$= \frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}u^2 - GMmu$$

$$\frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}u^2 - GMmu = E$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 - \frac{2GMm^2u}{L^2} = \frac{2mE}{L^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(u - \frac{GMm^2}{L^2}\right)^2 = \frac{G^2M^2m^4}{L^4}\left(1 - \frac{2|E|L^2}{G^2M^2m^3}\right)$$